

## Übungen zu Extremwerttheorie

(Zu Bearbeiten bis Donnerstag, den 09.07.2015, 12:00h)

1. Es sei  $X_1, \dots, X_n$  eine Stichprobe zur Verteilung  $F \in \mathcal{A}(H_\xi)$  mit  $\xi \geq 0$ . Daraus lässt sich wie in der Vorlesung ( $X_i^* := \log^+(X_i)$  und  $\log^+(x) := \log(e \vee x)$ ) die Stichprobe  $X_1^*, \dots, X_n^*$  der Verteilung  $F^* \in \mathcal{A}(\Lambda)$  erzeugen. Nun sei  $\hat{F}_n^*$  die empirische Verteilungsfunktion zur Stichprobe  $X_1^*, \dots, X_n^*$ . Zeige folgende Behauptungen aus der Vorlesung:

(a)  $(\hat{F}_n^*)^{-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right) = X_{(k+1:n)}^*$  für  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .

(b)  $\frac{n}{k} \int_{X_{(k+1:n)}^*}^{\infty} \overline{\hat{F}_n^*}(u) \, du = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X_{(j:n)}^* - X_{(k+1:n)}^*$ .

(2 + 2 Punkte)

2. Es seien  $n = 5040$ ,  $\alpha = \frac{1}{4}$  und  $F$  eine Pareto-Verteilung, also  $F(x) = (1 - x^{-\alpha})\mathbf{1}(x \geq 1)$ . Erzeuge gemäß  $F$  verteilte Realisierungen  $X_1, \dots, X_n$  und damit  $X_1^*, \dots, X_n^*$  wobei  $X_i^* = \log^+ X_i$  wie in Aufgabe 1 definiert ist.

- (a) Zeige, dass die Verteilung  $F^*$  von  $X_1^*$  durch  $F^*(t) = (1 - e^{-\alpha t})\mathbf{1}(t \geq 1)$  gegeben ist und bestimme damit die Folgen  $a_j^*$  und  $b_j^*$ , in Abhängigkeit von  $j$ , wie in Lemma 2.2.

- (b) Berechne für  $k = 100, \dots, 1$  die Schätzer  $\hat{a}_{\frac{n}{k}}^*$  (siehe Teilaufgabe 1(b)) und  $\hat{b}_{\frac{n}{k}}^*$  (siehe Teilaufgabe 1(a)). Erstelle einen gemeinsamen Plot der Punkte  $\left(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor, \hat{a}_{\frac{n}{k}}^*\right)$  und  $\left(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor, a_{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}^*\right)$  für  $k = 100, \dots, 1$ . Erstelle einen weiteren Plot mit den Punkten  $\left(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor, \hat{b}_{\frac{n}{k}}^*\right)$  und  $\left(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor, b_{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}^*\right)$  für  $k = 100, \dots, 1$ . Verbinde Punkte mit aufeinanderfolgenden Werten von  $k$ , für jede der vier Punktfolgen (Schätzer und theoretische Werte), mit Linien.

(4 Bonuspunkte + 8 Punkte)