Übungen zur Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 21. April 2015, vor den Übungen

1. Wir setzen folgende Gesetze über die Addition und Multiplikation reeller Zahlen als bekannt voraus:

   (AG) $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

   (DG) $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

   (NE) $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

   und treffen die Definitionen

   (i) 2:=1+1

   (ii) 3:=2+1

   (iii) 4:=3+1.

   Beweise unter ausschließlicher Verwendung von (AG), (DG), (NE) und den Definitionen (i), (ii) und (iii) die Aussage:

   $$2 \cdot 2 = 4.$$

   (6 Punkte)

2. Zeige:

   (a) Für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$.

   (b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

   $$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

   und

   $$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

   (c) Es gibt genau eine Zahl $e \in \mathbb{R}$ mit

   $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (d) Es gilt $2 < e < 3$. (12 Punkte)

3. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige:

   (a) $0 < 1$

   (b) $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$

   (c) $a < b \Leftrightarrow -b < -a$

   (d) $0 < a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ (6 Punkte)