ulm university universität ulm

Übungen zur Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Dienstag, 23. Juni 2015, vor den Übungen

1. Bestimme für
$$R(x) = \frac{x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 12x^3 + 21x^2 - 18x + 25}{(x^4+1)\cdot(x^2-6x+9)}$$
   (a) den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$,
   (b) die Partialbruchzerlegung,
   (c) für $x_0 \notin D$ die Ausdrücke $\lim\limits_{x\to x_0^+} R(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0^-} R(x)$,
   (d) die Ausdrücke $\lim\limits_{x\to\infty} R(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} R(x)$. (8 Punkte)

2. Es sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt periodisch mit Periode $\omega \neq 0$, wenn für alle $x \in D$ auch $x + \omega \in D$ und $f(x) = f(x+\omega)$ gilt.
   Begünde, warum eine reelle, nichtkonstante rationale Funktion nicht periodisch sein kann.
   (2 Punkte)

3. Zeige, dass für eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ mindestens ein $\xi \in [0,1]$ mit $f(\xi) = \xi$ existiert.
   (2 Punkte)

4. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und Funktionen $f, g\colon I \to \mathbb{R}$.
   Dann heißt f Lipschitz- stetig, falls ein $L > 0$ existiert, so dass
$$|f(x) - f(y)| \le L \cdot |x - y|$$
   für alle $x, y \in I$ gilt.
   (a) Es sei f Lipschitz- stetig. Zeige, dass f auf I gleichmäßig stetig ist.
   (b) Sind die Funktionen $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4 + 3x^2$ und $g(x) = x + \sqrt{x}$ Lipschitz- stetig?
   (c) Es seien f und g Lipschitz- stetig. Zeige, dass dann auch $f + g$ Lipschitz- stetig ist.
   (d) Es sei I kompakt sowie f und g Lipschitz- stetig. Zeige, dass dann $f \cdot g$ Lipschitz- stetig ist.
   (e) Es sei $I = [0,2]$. Zeige, dass $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{|1-x|}$ auf I gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz- stetig ist. (8 Punkte)

5. Es sei $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{für } x < -2 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ x-2 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$
   (a) Zeige die Stetigkeit und die strenge Monotonie von f.
   (b) Zeige die Existenz von f^{-1}.
   (c) Zeige, dass f^{-1} nicht stetig ist.
   (d) Wieso stellt dies keinen Widerspruch zu Satz 3.6.2 dar? (4 Punkte)