Übungen zur Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 30. Juni 2015, vor den Übungen

1. Es sei $\{q_1, q_2, q_3, \dots\}$ eine Abzählung für $\mathbb{Q}$.
   Wir definieren die Funktionen $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über
   $$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{falls} \quad x < 0. \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot h(x - q_k).$$
   Beweise:
   (a) Die Reihe, durch die f definiert wird, ist für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.
   (b) Die Funktion f ist streng monoton wachsend.
   (c) Die Funktion f ist für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ stetig und für alle $x \in \mathbb{Q}$ unstetig. (5 Punkte)

2. Bestimme die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
   $$f(x) = \frac{(x^2+1)\cdot\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}}$$
   und gib deren Definitionsbereich an. (4 Punkte)

3. Bestimme alle möglichen Paare (a, b) reeller Zahlen mit der Eigenschaft, dass die durch
   $$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{für} \quad x > 2 \\ (x+b)^2 + a, & \text{für} \quad x \leq 2 \end{cases}$$
   definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. (2 Punkte)

4. Es seien $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
   sowie $g(x) = x \cdot f(x)$ und $h(x) = x^2 \cdot f(x)$ gegeben.
   Überprüfe die Funktionen f, g und h auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. (5 Punkte)

5. (a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a < b$. Weiter sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und habe in (a, b) mindestens j Nullstellen. Wir setzen $F(x) := (x-a)^n \cdot (x-b)^n \cdot f(x)$.
   Zeige, dass $F^{(k)}(x) = (x-a)^{n-k} \cdot (x-b)^{n-k} \cdot \varphi_k(x)$ für alle $0 \leq k \leq n$ gilt, wobei $\varphi_k(x)$ in $[a, b]$ beliebig oft differenzierbar ist und in (a, b) mindestens $j + k$ Nullstellen hat.
   (b) Zeige, dass
   $$P_n(x) := \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$$
   ein Polynom vom Grad n ist und n verschiedene reelle Nullstellen im Intervall $(-1, 1)$ besitzt.
   (c) Bestimme diese Nullstellen für $n = 5$. (6 Punkte)

6. Es sei $a > 0$ und eine stetige Funktion $f\colon [0, a] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$, die auf $(0, a)$ differenzierbar sei.
   Zeige: Wenn $f'(x)$ monoton wachsend ist, dann ist auch $\frac{f(x)}{x}$ monoton wachsend. (2 Punkte)