Übungen zur Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 36 Punkte, alles Zusatzpunkte

Abgabe: **Donnerstag, 16. Juli 2015**, vor den Übungen

1. Für $x \in I := [0,1)$ sei

$$z(x) := \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{für} \quad \frac{1}{2} \le x < 1. \end{cases}$$

Für $x = k + u$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $0 \le u < 1$ sei $z(x) = z(u)$. Weiter sei für alle $x \in I$

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} \cdot z\left(100^n x\right).$$

Dann habe $x_0 \in I$ die g- Bruchentwicklung mit $g = 100$ derart, dass

$$x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 100^{-n}$$

mit $a_n \in \{0, 1, \ldots, 99\}$ und $a_n \neq 99$ für unendlich viele n sei. Es sei $m \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren

$$x_0^{(m)} := \sum_{n=0}^{m} a_n \cdot 100^{-n}, \quad x_1^{(m)} := x_0^{(m)}, \quad x_2^{(m)} := x_0^{(m)} + \frac{1}{2} \cdot 100^{-m} \quad \text{und} \quad x_3^{(m)} := x_0^{(m)} + 100^{-m}.$$

(a) Zeige, dass f auf I stetig ist.

(b) Zeige, dass z Lipschitz- stetig ist und die Lipschitz- Konstante $L = 1$ besitzt.

(c) Es sei $x_0^{(m)} \le x_0 \le x_0^{(m)} + 100^{-m}$. Zeige die Existenz eines $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ mit

$$\left| z\left(100^m x_j^{(m)}\right) - z\left(100^m x_0\right) \right| \ge \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \left| f(x_j^{(m)}) - f(x_0) \right| \ge \frac{1}{12} \cdot 10^{-m}.$$

(d) Zeige

$$\sup_{\substack{x_0^{(m)} \le x \le x_0^{(m)} + 100^{-m} \\ x \neq x_0}} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \ge \frac{1}{12} \cdot 10^m.$$

(e) Zeige, dass f in keinem $x_0 \in I$ differenzierbar ist. (10 Punkte)

2. (a) Zeige, dass

$$\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Es sei ζ_{31} eine 31ste- Einheitswurzel, d.h. $\zeta^{31} = 1$. Zeige $\zeta_{31} + \zeta_{31}^{30} \in \mathbb{R}$. (4 Punkte)

3. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(a) $e^x > 1 + x$ für alle $x \neq 0$

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ (6 Punkte)

4. Wir betrachten $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

   (a) Zeige, dass f Lipschitz- stetig ist.

   (b) Zeige, dass f unendlich oft differenzierbar ist.

   (c) Schreibe f in eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ um und bestimme deren Konvergenzradius.

   (d) Was fällt auf? (5 Punkte)

5. Analog zu den Arcusfunktionen lassen sich auch Umkehrfunktionen zu den Hyperbelfunktionen finden. Die Umkehrfunktion des Sinus hyperbolicus ist der Areasinus Hyperbolicus "$\operatorname{Arsinh} x$". Entsprechend werden der "$\operatorname{Arcosh} x$", der "$\operatorname{Artanh} x$" und der "$\operatorname{Arcoth} x$" definiert. Zeige:

   (a) $(\operatorname{Arcosh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

   (b) $\operatorname{Arsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

   (c) $\operatorname{Artanh} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ und bestimme den Konvergenzradius dieser Reihe.

   (d) Gib den Definitions- und Wertebereich, das Monotonie- und Symmetrieverhalten und den Grenzwert für $x \to \pm 1$ und $x \to \pm\infty$ des $\operatorname{Arcoth} x$ an. (5 Punkte)

6. (a) Es sei
$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$
   Zeige, dass f in $x_0 = 0$ nicht stetig ist.

   (b) Es sei
$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$
   Zeige, dass g in $x_0 = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

   (c) Es sei
$$h(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$
   Zeige, dass h in $x_0 = 0$ differenzierbar, h' in $x_0 = 0$ aber nicht stetig ist.

   (d) Es sei
$$k(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x^2} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$
   Zeige, dass k in $x_0 = 0$ differenzierbar, aber k' in $[-\delta, \delta]$ mit $\delta > 0$ unbeschränkt ist.

   (e) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann besitzt $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf I die Zwischenwerteigenschaft, falls es zu jedem abgeschlossenen Intervall $[a,b] \subseteq I$ und jedem $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq c \leq f(b)$ ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = c$ gibt.
   Zeige, dass die Funktion f aus Teilaufgabe a) auf dem Intervall $[-1,1]$ die Zwischenwerteigenschaft besitzt.

(6 Punkte)