Übungen zur Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 5. Mai 2015, vor den Übungen

1. (a) Es sei K ein angeordneter Körper und $a, b \in K \setminus \{0\}$. Zeige: $\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geq 2$.

   (b) Analog zu Aufgabe 3 von Übungsblatt 2 kann man zeigen:
   Für alle $x \in \mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0\}$ existiert genau ein $y \in \mathbb{R}_0^+$ mit $y^k = x$.
   Man schreibt dann $y := \sqrt[k]{x}$. Diese Aussage braucht nicht gezeigt werden.
   Es sei $0 < a < b$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Zeige: $0 < \sqrt[k]{b} - \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b-a}$.

   (c) Zeige, dass zu jedem $a \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$ existiert. (5 Punkte)

2. Zeige die folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k} = \frac{n \cdot (n+3)}{4}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \geq n^2$ mit $a_1, \ldots, a_n > 0$. (6 Punkte)

3. (a) Zeige, dass die Vereinigung induktiver Mengen wieder induktiv ist.

   (b) Sind Ober- bzw. Teilmengen induktiver Mengen auch wieder induktiv?

   (c) Gib ein Beispiel für ein Mengensystem $\mathcal{M}$ an, in dem keine Menge induktiv ist, aber dagegen Schnitt und Vereinigung über alle Mengen aus $\mathcal{M}$ jeweils induktiv sind. (3 Punkte)

4. Zeige Satz 1.4.2. (4 Punkte)

5. (a) Es sei $U_n = \displaystyle\sum_{m=1}^{n} m^3$.
   Werte $U_{n+1} - U_n$ wie in Beispiel 1.4.5 auf zwei Arten aus und leite daraus eine Formel für

$$\sum_{m=1}^{n} m^2$$

   her.

   (b) Es sei M eine nichtleere Menge.
   Wir betrachten wie auf Übungsblatt 6 in der Linearen Algebra die symmetrische Differenz $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ zweier Mengen $A, B \in \mathcal{P}(M)$ auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M, d.h. $\mathcal{P}(M) := \{N \colon N \subseteq M\}$. Bestimme

$$A^{\Delta_n} := \underbrace{A \Delta A \Delta \ldots \Delta A}_{n-\text{mal}}.$$

(6 Punkte)