Übungen zur Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 12. Mai 2015, vor den Übungen

1. Berechne zu den angegebenen Folgen jeweils den Grenzwert und ein $n_0 = n_0(\epsilon)$, so dass das Endstück der Folge ab dem n_0- ten Glied komplett in der ϵ- Umgebung um den Grenzwert liegt:
   (a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$
   (b) $b_n = \frac{n!}{n^n}$
   (c) $c_n = a_n + b_n$ (5 Punkte)
2. (a) Formuliere mit Hilfe der Quantorenschreibweise das Gegenteil der Konvergenzbedingung.
   (b) Zeige mit Teilaufgabe a), dass die Folge $x_n = r \cdot (-1)^n$ mit $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ divergiert. (3 Punkte)
3. Es sei eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nichtnegativer reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gegeben.
   Beweise, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ gilt. (2 Punkte)
4. Es sei $a \in \mathbb{R}^+$ beliebig. Wir definieren die drei Folgen
$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+a} - \sqrt{n} \\ b_n &= \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \quad \text{und} \\ c_n &= \sqrt{n+\frac{n}{a}} - \sqrt{n}. \end{aligned}$$
   (a) Zeige, dass für $n < a^2$ die Ungleichungen $a_n > b_n > c_n$ gelten.
   (b) Zeige $a_n \to 0$, $b_n \to \frac{1}{2}$ und $c_n \to \infty$ für $n \to \infty$. (4 Punkte)
5. Es sei $|z| < 1$ und $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ durch $z_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot z^k$ definiert.
   Untersuche $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert. (3 Punkte)
6. Zeige die folgenden Aussagen:
   (a) Ist eine Folge (a_k) natürlicher Zahlen konvergent, so sind ab einem n_0 alle Folgenglieder gleich.
   (b) Es gibt eine konvergente Folge (a_n) und ein $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass die Folge $b_n = f(a_n)$ divergiert.
   (c) Ist eine Folge (a_n) konvergent, so auch die Folge der zugehörigen arithmetischen Mittelwerte
$$A_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k.$$
   (d) Besitzt $M \subset \mathbb{R}$ ein Supremum, so gibt es eine Folge (a_n) mit $a_n \in M$, die gegen das Supremum konvergiert. (5 Punkte)
7. Zeige oder widerlege folgende Aussage:
   Ist $(a_n^{(j)})$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge, so ist auch die "Diagonale" $(a_n^{(n)})$ eine Nullfolge.
   (2 Punkte)