Übungen zur Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 19. Mai 2015, vor den Übungen

1. Untersuche, ob folgende Folgen reeller Zahlen konvergieren und bestimme ggfs. den Grenzwert:

   (a) $a_n = \dfrac{n^2+n+2}{4n^3+1}$

   (b) $b_n = \dfrac{1+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n^4}$

   (c) $c_n = n^2 \cdot \left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - 1\right)$

   (d) $d_n = \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$ mit $x \in \mathbb{R}$ (7 Punkte)

2. In Beispiel 1.4.2 wurde die Folge der Fibonacci- Zahlen über die Rekursion $a_0 = a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ eingeführt. Weiter sei $g_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Zeige:

$$g := \lim_{n\to\infty} g_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(3 Punkte)

3. Es sei $a \in \mathbb{R}^+$ beliebig. Wir definieren über

$$a_1 = \sqrt{a}, \quad a_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}, \quad a_3 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}, \ldots$$

   eine Folge. Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. (3 Punkte)

4. Es sei $a_n = \frac{n}{2} \cdot (1+(-1)^n)$.

   (a) Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

   (b) Bestimme eine konvergente Teilfolge a_{n_k}. (3 Punkte)

5. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, rekursiv definierte Folge mit dem Startwert $a_1 := a$ und der Vorschrift

$$a_{n+1} := \frac{2a_n+1}{a_n+2}$$

   für $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Ermittle die ersten fünf Folgenglieder $a_1, \ldots, a_5$ in Abhängigkeit von a.

   (b) Bestimme unter der Annahme $a_k \neq -2$ für $1 \leq k \leq n-1$ eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so das sich die explizite Formel

$$a_n = \frac{b_n \cdot a + (b_n - 1)}{(b_n-1)\cdot a + b_n}$$

   ergibt, und gib a_n explizit an.

   (c) Gib eine Bedingung für den Startwert a an, damit die Folge wohldefiniert ist.

   (d) Konvergiert die Folge? Bestimme ggfs. den Grenzwert. (8 Punkte)