Übungen zur Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 26. Mai 2015, vor den Übungen

1. Bestimme jeweils die Menge der Häufungswerte, sowie Limes superior und Limes inferior der angegebenen Folge:

   (a) $a_n = 2 + \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}$

   (b) $b_n = \frac{n}{m} - \left[\frac{n}{m}\right]$ mit einem festen $m \in \mathbb{N}$

   (c) $c_n = \begin{cases} 1 + 2^{-n} & \text{für } n = 3k \text{ mit } k \in \mathbb{N} \\ 2 + \frac{n+1}{n} & \text{für } n = 3k+1 \text{ mit } k \in \mathbb{N} \\ 2 & \text{für } n = 3k+2 \text{ mit } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

   Hinweis:

   Die Gaußklammer $[x]$ ist die größte ganze Zahl kleiner gleich x. (6 Punkte)

2. Bestimme die Menge der Häufungswerte der komplexen Folge (z_n) mit $z_n = i^n + \frac{1}{2^n}$, wobei i die imaginäre Einheit bezeichne. (2 Punkte)

3. Untersuche nachstehende Folgen auf Konvergenz:

   (a) $a_n = \frac{i^n \cdot n^2}{n^2+1}$

   (b) $b_n = \frac{1}{n+8} \cdot \left(\sum_{\nu=2}^{n} \nu\right) - \frac{n}{2}$ (6 Punkte)

4. Zeige, dass jede konvergente Folge die Cauchy- Bedingung erfüllt. (2 Punkte)

5. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

   $$a_n = \frac{n - \frac{(k-1)\cdot k}{2}}{k+1},$$

   wobei $k = k(n) \in \mathbb{N}$ mit

   $$\frac{(k-1)\cdot k}{2} < n \leq \frac{k\cdot(k+1)}{2}$$

   sei.

   Zeige: Die Menge der Häufungswerte von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist das Intervall $[0, 1]$. (4 Punkte)

6. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle beschränkte Folge, für die zudem

   $$\lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n-1}) = 0$$

   gelte.

   (a) Zeige, dass jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$ Häufungswert von (a_n) ist.

   (b) Gib ein Beispiel einer Folge an, welche die Voraussetzungen von Teilaufgabe a) erfüllt, aber nicht konvergiert. (4 Punkte)