ulm university universität ulm

Übungen zur Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 2. Juni 2015, vor den Übungen

1. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k}\right)^k$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$ (7 Punkte)

2. Es sei $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Für welche x konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^k}$? (3 Punkte)

3. Zeige, dass die folgenden Reihen konvergieren und bestimme ihren Wert:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right)$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}$ (4 Punkte)

4. Wir streichen in der harmonischen Reihe alle Terme, in denen die Dezimaldarstellung von k, d.h. das Stellenwertsystem zur Basis 10, die Ziffer 0 enthält.
   Zeige, dass diese Reihe konvergiert und bestimme eine obere Schranke für ihren Wert. (3 Punkte)

5. Es sei a_n die n- te Fibonacci- Zahl (vgl. Aufgabe 2 von Übungsblatt 5).

   (a) Es sei $N \in \mathbb{N}$. Zeige
   $$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n \cdot a_{n+2}} = 1 - \frac{1}{a_{N+1}\cdot a_{N+2}}.$$

   (b) Zeige mit Teilaufgabe a) die Aussage
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n \cdot a_{n+2}} = 1.$$

   (4 Punkte)

6. (a) Gib ein Beispiel einer konvergenten Reihe $\sum_k a_k$ mit $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ eine gegen ∞ divergierende Teilfolge enthält.

   (b) Begründe, warum dies dem Quotientenkriterium nicht widerspricht. (3 Punkte)