Übungen zur Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 9. Juni 2015, vor den Übungen

1. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{5}$.

   (a) Zeige:
   $$\sum_{n=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{m+k+1}{m}.$$

   (b) Zeige die absolute Konvergenz der Reihe
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \cdot z^n.$$

   (c) Zeige:
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} \cdot z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}.$$

   (6 Punkte)

2. Ermittle die ersten 18 Summanden einer Umordnung der alterniernden harmonischen Reihe, welche den Wert $\sqrt{2}$ besitzt. (4 Punkte)

3. Zeige, dass im Rahmen der gewöhnlichen Division zur Erlangung der Dezimalbruchdarstellung rationaler Zahlen für periodische Dezimalbrüche mit Periodenlänge $s \in \mathbb{N}$ folgende Regel gilt:
   $$0,\overline{d_1 \ldots d_s} = \frac{d_1 \ldots d_s}{\underbrace{9 \ldots 9}_{s-mal}},$$
   wobei $d_k \in \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$ die jeweiligen Dezimalstellen bezeichne. (3 Punkte)

4. Es sei $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 4x - 3$. Zeige mit der Definition des Grenzwertbegriffs für Funktionen, dass dieser an der Stelle $x_0 = 1$ existiert und gib dessen Wert an. (3 Punkte)

5. Überprüfe die Existenz folgender Grenzwerte mit dem Folgenkriterium und ermittle ggfs. den Wert:

   (a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ mit $f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{(x+1)^2} & \text{für } x \neq 1 \\ -2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$ für $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$

   (b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ mit $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + |x|}$ für $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ (3 Punkte)

6. Bestimme folgende Grenzwerte der angegebenen Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ im Falle ihrer Existenz:

   (a) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ mit $f(x) = \dfrac{x^k - a^k}{x - a}$ mit $k \in \mathbb{N}$ sowie $D = \mathbb{R}\backslash\{a\}$ für $a \in \mathbb{R}$

   (b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ mit $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x-1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + k \cdot (x+5))^2 - \sqrt{k}}{k^4}$ mit $D = [-2, -1] \cup \{0\} \cup [1, 2]$

   (c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ mit $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$ mit $D = (-1, 1)\backslash\{0\}$ (5 Punkte)