

## Übungen zur Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 16. Juni 2015, vor den Übungen

1. Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2 + x + 1$  ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig. Bestimme zu  $\epsilon > 0$  explizit ein  $\delta > 0$ , so dass  $|f(x) - f(2)| < \epsilon$  für alle  $x \in U_\delta(2)$  gilt. (3 Punkte)

2. Untersuche die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{für } x \leq 0 \\ x^2 - x + a, & \text{für } x > 0 \end{cases} \text{ mit } a \in \mathbb{R}.$$

(b)  $f(x) = [x] + (x - [x])^2$ , wobei  $[x]$  die größte ganze Zahl kleiner gleich  $x$  bezeichne. (4 Punkte)

3. Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $D = (-3, -1) \cup \{0\} \cup (1, 5)$  und

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für } -3 < x < -1 \\ c, & \text{für } x = 0 \\ x + 5, & \text{für } 1 < x < 5. \end{cases}$$

Entscheide für jedes  $c \in \mathbb{R}$ , in welchen Punkten von  $x_0 \in D$  die Funktion  $f$  stetig ist. (2 Punkte)

4. Es sei  $\epsilon := \frac{1}{75}$  sowie  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D = (-3, 0) \cup \{1\}$  und

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für } -3 < x < 0 \\ \frac{1}{10}, & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Gib für jedes  $x_0 \in D$  das größte  $\delta(x_0, \epsilon)$ , so dass aus  $|x - x_0| < \delta(\epsilon)$  die Eigenschaft  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$  folgt. (4 Punkte)

5. Es seien  $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetige Funktionen mit  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ .

Zeige, dass dann auch  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in [0, 1]$  gilt. (3 Punkte)

6. Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in 0 stetig, und es gelte  $f(0) = 1$ . Zudem sei  $f(x+y) \leq f(x) \cdot f(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

(a) Zeige  $f(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

(b) Zeige, dass  $f$  stetig auf  $\mathbb{R}$  ist. (5 Punkte)

7. Es sei  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow g(x)$  mit

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 5, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  in  $x_0 = 2$  stetig, und es gelte  $f(2) = 0$ .

(a) Zeige, dass die Funktion  $g \circ f$  in  $x_0 = 2$  nicht stetig ist.

(b) Bestimme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f) \left( 2 + \frac{1}{n} \right).$$

(3 Punkte)