Probeklausur zur
Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

keine Abgabe

1. Es seien a, b, c, λ Elemente eines angeordneten Körpers K. Zeige, dass aus $a < b$ und $0 < \lambda < 1$
$$a < \lambda a + (1 - \lambda) \cdot b < b$$
folgt. (5 Punkte)

2. Bestimme von $M = [1, \sqrt{2}]\backslash(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ im Falle der Existenz Infimum, Supremum, Minimum und Maximum. (6 Punkte)

3. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} < 2$$
gilt. (6 Punkte)

4. (a) Beweise mit vollständiger Induktion $2^n \geq n^2$ für alle $n \geq 4$.
   (b) Berechne damit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n}$ für $a \geq 2$. (7 Punkte)

5. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit
$$a_n = \frac{3n^2}{5n^2 + 3n}.$$
Zeige mit Hilfe der Definition der Konvergenz, dass diese Folge konvergiert. (6 Punkte)

6. Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit
$$a_n = \left(\sqrt{n^2 + 4n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}\right) \cdot (-1)^{[\frac{n}{2}]},$$
wobei $[x]$ wieder die größte ganze Zahl kleiner gleich x bezeichne.
   (a) Bestimme die Menge der Häufungswerte sowie Limes superior und Limes inferior dieser Folge.
   (b) Zeige, dass diese Folge nicht konvergiert.
   (c) Gib eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ dieser Folge an. (8 Punkte)

7. Wir betrachten die rationale Funktion
$$R(x) = \frac{x^4 + 16}{x^4 - 16}.$$
   (a) Wieviele reelle Nullstellen besitzt $R(x)$?
   (b) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von $R(x)$. (9 Punkte)

8. (a) Überprüfe die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+k}{n}}$$

für ein $k \in \mathbb{N}_0$ auf Konvergenz. Konvergiert sie ggfs. auch absolut bzw. unbedingt?

(b) Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3}-1)^n$$

absolut konvergiert und bestimme deren Wert. (10 Punkte)

9. (a) Gib eine Definition folgender Begriffe an:
   i. induktive Menge
   ii. Häufungspunkt
   iii. gleichmäßige Stetigkeit

   (b) Formuliere den Zwischenwertsatz. (12 Punkte)

10. Untersuche folgende Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + b & \text{für } x \leq 2 \\ 3x - a & \text{für } x > 2 \end{cases}$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = x - \sqrt{x - [x]}$ (8 Punkte)

11. Es sei $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Es existiere ein $M > 0$ und ein $\alpha > 1$, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|^{\alpha}$$

für alle $x, y \in [a,b]$ gilt. Zeige, dass f auf dem Intervall $[a,b]$ konstant ist. (6 Punkte)

12. Es sei $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 + 6x - 40}$$

gegeben.

(a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich D_f.

(b) Berechne die Ableitung von f und vereinfache soweit wie möglich.

(c) Bestimme die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 4} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} f(x).$$

(11 Punkte)

13. Es sei $I = [-1, 4]$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 7$.
Bestimme $\max_{x \in I} f(x)$ und $\min_{x \in I} f(x)$. (6 Punkte)

14. Bestimme das zweite Taylorpolynom von $f\colon (1,3) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$. (7 Punkte)

Viel Erfolg!