ulm university universität uulm

Skript zur Vorlesung

Analysis I
für Informatiker und Ingenieure

Sommersemester 2015

Prof. Dr. Helmut Maier
Dr. Hans- Peter Reck

Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie
Universität Ulm

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Reelle Zahlen

1.1 Einführung

Wie in der Vorlesung "Lineare Algebra" soll die Theorie systemathisch aus einem System von Axiomen durch Definitionen und Beweise aufgebaut werden.
Während im Fall der Linearen Algebra die Vektorraumaxiome die Grundlage bilden, sind es in der Analysis die Axiome für die reellen Zahlen, mit denen wir beginnen wollen.
Auch in der Analysis spielen Abbildungen zwischen Mengen eine wichtige Rolle.
Die grundlegenden Begriffe, die damit in Verbindung stehen, nämlich Bild, Urbild, Injektivität, Surjektivität und Bijektivität, wurden in der Vorlesung Lineare Algebra bereits behandelt und werden als bekannt vorausgesetzt.
Weiter setzen wir algebraische Grundstrukturen wie Gruppe, Ringe und Körper als bekannt voraus.

1.2 Die reellen Zahlen

Die Axiome für die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen lassen sich in drei Gruppen gliedern: Körperaxiom, die Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom.

<u>Körperaxiom</u>:

(K) Auf $\mathbb{R}$ existieren zwei Verknüpfungen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation), so dass gilt: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bildet einen Körper.

Bemerkung 1.2.1. Wie bei Körpern allgemein üblich wird das neutrale Element der Addition mit 0 und das neutrale Element der Multiplikation mit 1 bezeichnet.

<u>Anordnungsaxiome</u>:

Es gibt eine Relation "$<$" (sprich: kleiner) auf $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}$, so dass folgende Gesetze gelten:

(A1) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt stets genau eine der Beziehungen $a < b$, $a = b$ und $b < a$. (Trichotomie).

(A2) $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$. (Transitivität).

(A3) Ist $a < b$, so gilt $a + c < b + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und $ac < bc$ für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $0 < c$. (Monotonie).

Definition 1.2.1. Die zu der Relation "$<$" inverse Relation ist die Relation "$>$" (größer). Die Zeichen "$\leq$" bzw. "$\geq$" bedeuten kleiner oder gleich bzw. größer oder gleich.

Bemerkung 1.2.2. Jeder Körper, der außer dem Körperaxiom (K) auch noch die Anordnungsaxiome $(A1)$ bis $(A3)$ erfüllt, heißt angeordneter Körper.

Zur Formulierung des letzten Axioms, des Vollständigkeitsaxioms, brauchen wir zunächst folgende

Definition 1.2.2. Es sei $X \subset \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$. Dann heißt s eine obere Schranke von X, falls $x \leq s$ für alle $x \in X$ gilt. Falls eine obere Schranke von X existiert, heißt $X \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Man nennt s kleinste obere Schranke oder Supremum von X, falls s eine obere Schranke von X ist und für alle oberen Schranken t von X gilt, dass $s \leq t$ ist.
Die größte untere Schranke von X wird analog definiert und Infimum genannt.

Nun können wir noch unser letztes Axiom formulieren:

Vollständigkeitsaxiom:

(V) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge besitzt ein Supremum.

1.3 Ungleichungen, Rechenregeln, Betrag

Definition 1.3.1. Man nennt $a \in \mathbb{R}$

- positiv, wenn $a > 0$ und
- negativ, wenn $a < 0$ ist.

Satz 1.3.1. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(i) $0 < 1$

(ii) $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

(iii) $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$

(iv) $a < b \Leftrightarrow -b < -a$

(v) $0 < a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0.$

Beweis. Wir beweisen nur (ii): $b - a > 0 \underset{(A3)}{\Leftrightarrow} (b-a) + a > 0 + a \Leftrightarrow b > a.$ □

Satz 1.3.2. *(Addition von gleichsinnigen Ungleichungen)*
Aus $a < b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$.

Beweis. Aus der Monotonie $(A3)$ folgt $a + c < b + c$ und $b + c < b + d$. Mit der Transitivität $(A2)$ gilt dann $a + c < b + d$. □

Satz 1.3.3. *(Durchmultiplikation von Ungleichungen)*
Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, und es sei $a < b$.

(i) Ist $c > 0$, so folgt $ac < bc$.

(ii) Ist $c < 0$, so folgt $bc < ac$.

Beweis. (i) ist Axiom $(A3)$ (Monotonie)

(ii) Nach Satz 1.3.1 (iii) ist $-c > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a < b \quad &\underset{S.1.3.1(ii)}{\Leftrightarrow} \quad b - a > 0 \underset{\substack{-c>0 \\ (A3)}}{\Leftrightarrow} (b-a)(-c) > 0 \Leftrightarrow (a-b)\cdot c > 0 \\ &\underset{(K)}{\Leftrightarrow} \quad ac - bc > 0 \underset{S.1.3.1(ii)}{\Leftrightarrow} bc < ac. \end{aligned}$$

□

Satz 1.3.4. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ Dann folgt*

$$ab > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a > 0 \text{ und } b > 0) \quad \underline{\text{oder}} \quad (a < 0 \text{ und } b < 0).$$

Beweis. ohne Beweis □

Satz 1.3.5. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$. Dann gilt*

$$\frac{a}{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a > 0 \text{ und } b > 0) \quad \underline{\text{oder}} \quad (a < 0 \text{ und } b < 0).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$b > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} > 0. \tag{$*$}$$

Nach $(A1)$ (Trichotomie) gilt genau einer der Fälle

$$\frac{1}{b} < 0, \quad \frac{1}{b} = 0, \quad \frac{1}{b} > 0.$$

<u>Annahme:</u>

- $\frac{1}{b} = 0 \Rightarrow 1 = b \cdot \frac{1}{b} = 0$ im Widerspruch zu $0 \neq 1$.
- $\frac{1}{b} < 0 \underset{(A3)}{\Rightarrow} b \cdot \frac{1}{b} < 0 \cdot b \underset{(K)}{\Rightarrow} 1 < 0$ im Widerspruch zu Satz 1.3.1.

Also gilt $(*)$.
Wir kommen nun zum Beweis der Behauptung:
"$\Leftarrow$:"

<u>Fall 1:</u>

$$a > 0,\ b > 0 \underset{(*)}{\Rightarrow} a > 0,\ \frac{1}{b} > 0 \underset{(A3)}{\Rightarrow} \frac{a}{b} > 0.$$

<u>Fall 2:</u>

$$\begin{aligned} a < 0,\ b < 0 \quad &\underset{S.1.3.1(iii)}{\Rightarrow} \quad -a > 0,\ -b > 0 \underset{(*)}{\Rightarrow} -a > 0,\ -\frac{1}{b} > 0 \\ &\underset{(A3)}{\Rightarrow} \quad \frac{-a}{-b} > 0 \underset{(K)}{\Rightarrow} \frac{a}{b} > 0. \end{aligned}$$

"$\Rightarrow$:"
Zunächst folgt $a \neq 0$, denn $a = 0 \underset{(K)}{\Rightarrow} a \cdot \frac{1}{b} = 0$.
Annahme:
Die Behauptung ($a > 0$ und $b > 0$) oder ($a < 0$ und $b < 0$) ist falsch.
Dann muss wegen ($A1$) (Trichotomie) einer der folgenden Fälle zutreffen:

Fall 1: $a > 0$ und $b < 0$

Fall 2: $a < 0$ und $b > 0$

Diese beiden Fälle schließen wir der Reihe nach aus.

Fall 1: $a > 0,\ b < 0 \Rightarrow -a < 0,\ b < 0$.
Nach der schon bewiesenen Richtung "$\Leftarrow$" folgt dann $-\frac{a}{b} > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Fall 2: $a < 0$ und $b > 0 \Rightarrow -a > 0,\ -b < 0 \underset{''\Leftarrow:''}{\Rightarrow} \frac{-a}{-b} < 0 \underset{(K)}{\Rightarrow} \frac{a}{b} < 0$, ebenfalls ein Widerspruch.

$\square$

Definition 1.3.2. (Vorzeichen, Absolutbetrag)
Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & \text{für} \quad a > 0 \\ 0, & \text{für} \quad a = 0 \\ -1, & \text{für} \quad a < 0. \end{cases}$$

das Vorzeichen oder Signum von a.
Der Absolutbetrag (kurz: Betrag, Schreibweise: $|a|$) von $a \in \mathbb{R}$ ist durch

$$|a| := \operatorname{sgn}(a) \cdot a = \begin{cases} a, & \text{für} \quad a \geq 0 \\ -a, & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$$

erklärt.

Satz 1.3.6. *(Eigenschaften des Absolutbetrages)*
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist

(i) $|a| \geq 0$ *und* $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ *(Definitheit)*

(ii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ *(Multiplikativität)*

(iii) $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(Dreiecksungleichung)*

Beweis. Wir beweisen nur (iii):
Es sei $\epsilon := \operatorname{sgn}(a + b)$.
Wegen $a \leq |a|$ und $|\pm 1| = 1$ folgt

$$|a + b| = \epsilon(a + b) = \epsilon a + \epsilon b \leq |\epsilon a| + |\epsilon b| = |a| + |b|.$$

$\square$

Satz 1.3.7. *Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Eigenschaften:*

(i) $a \leq |a|$

(ii) *Für* $a \neq 0$ *gilt* $a^2 = (-a)^2 = |a|^2 > 0$.

(iii) *Für* $a \neq 0$ *gilt* $|a^{-1}| = |a|^{-1}$.

(iv) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Beweis. ohne Beweis □

Wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind die Intervalle.

Definition 1.3.3. (Intervalle)
Es seien $a \leq b \in \mathbb{R}$. Die folgenden Mengen heißen Intervalle:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\}$$

und falls $a < b$

$$\begin{aligned} [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x < b\} \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} |\ a < x \leq b\} \\ (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\} \end{aligned}$$

Dann heißt $[a, b]$ abgeschlossenes, auch kompaktes Intervall, (a, b) heißt offen und $[a, b)$ bzw. $(a, b]$ heißen halboffen. Die Eigenschaften abgeschlossen, kompakt und offen von Teilmengen von $\mathbb{R}$ werden später allgemein definiert werden.

Definition 1.3.4. (unendliche Intervalle)
Diese Intervalle werden mittels der Symbole ∞ und $-\infty$ (sprich: unendlich und minus unendlich) definiert. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir definieren:

$$\begin{aligned} [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x\} \\ (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} |\ a < x\} \\ (-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} |\ x \leq b\} \\ (-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} |\ x < b\} \\ (-\infty, \infty) &:= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Definition 1.3.5. (Maximum, Minimum)
Es sei $X \subset \mathbb{R}$. Dann heißt m Minimum von X (Schreibweise: $\min X$), falls $m \in X$ und $m \leq x$ für alle $x \in X$ gilt, und M heißt Maximum von X (Schreibweise: $\max X$), falls $M \in X$ und $x \leq M$ für alle $x \in X$ ist.

Satz 1.3.8. *Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt*

(i) $|a| < c \Leftrightarrow a \in (-c, c)$

(ii) $|b - a| < c \Leftrightarrow b \in (a - c, a + c)$

Beweis. ohne Beweis □

1.4 Natürliche Zahlen, vollständige Induktion

Nun können wir die natürlichen Zahlen einführen, die wir bisher noch nicht kennen.

Definition 1.4.1. (i) Eine induktive Menge I reeller Zahlen ist eine Menge mit den Eigenschaften:

- $1 \in I$
- $n \in I \Rightarrow n+1 \in I$

(ii) Die Menge der natürlichen Zahlen ist der Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wir bezeichnen diese als $\mathbb{N}$.

Satz 1.4.1. *Es gilt:*

(i) $\mathbb{N} \neq \emptyset$*,* $\mathbb{N}$ *ist induktiv*

(ii) Jede induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$ *ist* $\mathbb{N}$*.*

(iii) $\min \mathbb{N} = 1$

(iv) Für $n \in \mathbb{N}$ *gibt es kein* $m \in \mathbb{N}$ *mit* $n < m < n+1$*.*

(v) $n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow n+m \in \mathbb{N}$ *und* $n \cdot m \in \mathbb{N}$

(vi) Es seien $n \in \mathbb{N}$ *und* $m \in [1, \infty)$*. Dann ist* $n - m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow m \in \mathbb{N}$ *und* $m < n$*.*

Zur Vorbereitung des Beweises zeigen wir zunächst:

Lemma 1.4.1. *Der Durchschnitt einer beliebigen Menge induktiver Teilmengen von* $\mathbb{R}$ *ist induktiv.*

Beweis. Es sei J eine Menge von induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $M = \bigcap_{I \in J} I$. Dann ist

- $1 \in I$ für alle $I \in J \Rightarrow 1 \in \bigcap_{I \in J} I = M$.
- $n \in M \Rightarrow n \in I,\ \forall I \in J \underset{I \text{ induktiv}}{\Rightarrow} n+1 \in I,\ \forall I \in J \Rightarrow n+1 \in M$.

□

Beweis. (Beweis von Satz 1.4.1)
Es sei J die Menge aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(i) Nach Lemma 1.4.1 ist $\mathbb{N}$ induktiv und damit $1 \in \mathbb{N}$, also $\mathbb{N} \neq \emptyset$.

(ii) Es sei M eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann gilt:

- $M \subset \mathbb{N}$. Nun ist $\mathbb{N} = \bigcap_{I \in J} I$, also $\mathbb{N} \subset I,\ \forall I \in J$. Da $M \subset J$ ist, folgt
- $\mathbb{N} \subset M$.

Also ist $\mathbb{N} = M$.

(iii) Wegen $1 \in [1, \infty)$ und $n \geq 1 \underset{(A3)}{\Rightarrow} n+1 \geq 1$ ist $[1, \infty)$ induktiv. Also ist $\mathbb{N} \subset [1, \infty) \Rightarrow n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Es sei $K := \{n \in \mathbb{N} \colon \nexists m \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad n < m < n+1\}$. Wir zeigen, dass K induktiv ist:
Es sei $M_1 := \mathbb{N} \backslash (1, 1+1)$. dann ist M_1 induktiv, also $M_1 = \mathbb{N}$. Es ist $\mathbb{N}_1(1, 1+1) = \emptyset$. Damit ist $1 \in K$.
Nun sei $n \in K$:
Setze $M_{n+1} := \mathbb{N} \backslash (n+1, n+1+1)$. Wiederum ist M_{n+1} induktiv, da $1 \in M_{n+1}$ ist und aus $m \in M_{n+1}$ folgt, da $n \in K$ ist, $m \notin (n, n+1)$ ist. Also ist $m+1 \notin (n+1, n+1+1)$ und folglich $m+1 \in \mathbb{N} \backslash (n+1, n+1+1) = M_{n+1}$.
Damit ist $M_{n+1} = \mathbb{N}$. Also ist $\mathbb{N}_1(n+1, n+1+1) = \emptyset$ und $n+1 \in K$. Also ist $K = \mathbb{N}$.

(v) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge $L_n := \{m \in \mathbb{N} |\ n+m \in \mathbb{N}\}$. Diese Menge ist induktiv, denn $n \in L_n \underset{\mathbb{N} \in J}{\Rightarrow} n+1 \in \mathbb{N}$. Also ist $1 \in L_n$.
Es sei $m \in L_n$, also $n+m \in \mathbb{N} \underset{\mathbb{N} \in J}{\Rightarrow} (n+m)+1 \underset{(K)}{=} n+(m+1) \in L_n$. Also ist $m+1 \in L_n$.
Damit ist $L_n = \mathbb{N}$.

Wir verzichten auf den Beweis des zweiten Teils und auf den Beweis von Teil (vi). □

Bemerkung 1.4.1. Das Beweisverfahren in Satz 1.4.1, Teil (iv) und (v) ist der Beweis durch vollständige Induktion:
Es ist eine Aussage $A(n)$ zu beweisen, die von der natürlichen Zahl n abhängt. Eigentlich handelt es sich um eine Folge von Aussagen $A(n)$, wie zum Beispiel in (iv) die Aussage $A(n)$: Es gibt kein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \in (n, n+1)$. Man definiert die Menge W aller n, für die die Aussage $A(n)$ wahr ist und zeigt, dass diese Menge induktiv ist, d.h.

(i) $1 \in W$: $A(1)$ ist wahr

(ii) $n \in W \Rightarrow (n+1) \in W$: Wenn $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

Nach Satz 1.4.1 (ii) folgt dann: $W = \mathbb{N}$, d.h. $A(n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.
Ein Beweis durch vollständige Induktion geht also nach folgendem Schema:

(i) $n = 1$: (Induktionsanfang):
$A(1)$ ist wahr.

(ii) $n \to n+1$ (Induktionsschritt):
Wenn $A(n)$ wahr ist (Induktionshypothese), dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

Definition 1.4.2. (i) Mengen X und Y sind gleichmächtig (Schreibweise: $X \sim Y$), falls es eine injektive Abbildung $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to X$ gibt.

(ii) Die Menge X heißt von kleinerer Mächtigkeit als die Menge Y (Schreibweise $X \prec Y$), falls es eine injektive Abbildung $f \colon X \to Y$, aber keine injektive Abbildung $g \colon Y \to X$ gibt.

(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ sei der Abschnitt bis n (Schreibweise: $\mathbb{N}(n)$) durch $\mathbb{N}(n) := \{m \in \mathbb{N} |\ m \leq n\}$ definiert.

Eine Menge X heißt endlich, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $X \sim \mathbb{N}(n)$, andernfalls unendlich.
Man nennt X abzählbar unendlich, falls $X \sim \mathbb{N}$ und abzählbar, falls X endlich oder abzählbar unendlich ist, andernfalls überabzählbar.

Satz 1.4.2. *Es seien X, Y, Z Mengen.*

(i) $X \sim Y \Leftrightarrow \exists f\colon X \to Y$, *$f$ bijektiv*

(ii) $X \prec Y$ *und* $Y \prec Z \Rightarrow X \prec Z$

(iii) $X \neq \emptyset$ *erfüllt genau eine der folgenden Möglichkeiten: X endlich, X abzählbar unendlich, X überabzählbar*

(iv) Ist X endlich, so gibt es genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit $X \sim \mathbb{N}(n)$.

Beweis. Übungen □

Definition 1.4.3.

$$2 := 1 + 1,\ \ 3 := 2 + 1,\ \ 4 := 3 + 1, \ldots, 9 := 8 + 1,\ \ 10 := 9 + 1, \ldots$$

Definition 1.4.4. Es sei X eine endliche Menge. Ist $n \in \mathbb{N}$ die nach Satz 1.4.2 eindeutig bestimmte natürliche Zahl mit $X \sim \mathbb{N}(n)$, so schreiben wir $|X| = n$ und sagen, X hat <u>n Elemente</u>.

Beispiel 1.4.1. Es sei $X = \{a, b, c\}$.
Für $n \geq 3$ haben wir eine bijektive Abbildung $f\colon X \to \mathbb{N}(3) = \{1, 2, 3\}$ mit $f(a) := 1$, $f(b) := 2$ und $f(c) := 3$. Also ist $|X| = 3$, d.h. X hat drei Elemente.

Satz 1.4.3. *(i) Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein Minimum (Wohlordnungssatz).*

(ii) Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt Maximum und Minimum.

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 1.4.5. Wir setzen $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Die Mengen $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen sind durch $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n\colon n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathbb{Q} = \left\{\frac{r}{s}\colon r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\right\}$ definiert.

Man zeigt leicht:

Satz 1.4.4. *(i) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine kommutative Gruppe.*

(ii) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Beweis. Durch Nachrechnen. □

Definition 1.4.6. Unter einer <u>Folge</u> a_n von Elementen einer Menge X verstehen wir eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to X$, $n \to a_n$ oder $f\colon \mathbb{N}_0 \to X$, $n \to a_n$. Dabei heißt a_n auch das n- te <u>Glied der Folge</u> und n heißt <u>Folgenindex</u> (kurz: Index). Statt n kann auch jedes andere Symbol verwendet werden. Unter einer <u>endlichen Folge</u> verstehen wir eine Abbildung $f\colon \mathbb{N}(n) \to X$. Wir betrachten meist den Fall $X = \mathbb{R}$, also Folgen reeller Zahlen. Künftig soll unter einer Folge stets eine Folge reeller Zahlen gemeint sein, falls nichts anderes vereinbart ist. Eine Folge kann durch eine Gleichung, z. B. $a_n = 5n + 2$, beschrieben werden. Sie kann auch durch <u>vollständige Induktion</u> definiert werden.

Beispiel 1.4.2. (Folge der Fibonacci- Zahlen)
Es sei (a_n) durch

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für} \quad n \geq 2$$

gegeben. Die ersten Glieder der Folge berechnen sich zu

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= a_1 + a_0 = 1 + 1 = 2 \\ a_3 &= a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

Summen und Produkte einer beliebigen Anzahl von Gliedern einer Folge können induktiv definiert werden.

Definition 1.4.7. Es sei $(a_n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge. Dann definieren wir die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ der <u>n- ten Partialsummen</u> induktiv durch

(i) $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1$$

(ii) $n \to n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}.$$

In $\sum_{k=1}^{n} a_k$ heißt k die <u>Summationsvariable</u>, 1 (bzw. n) die untere (bzw. obere) <u>Summationsgrenze</u>, und $\{m \in \mathbb{N}\colon 1 \leq m \leq n\}$ heißt auch Summationsintervall. Die Sprechweise ist: Summe $k = 1$ bis n, a_k. Für die Summationsvariable kann auch jedes andere Symbol benützt werden. Allgemeiner können auch Summen $\sum_{k=0}^{n} a_k$, falls $(a_n)\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, oder $\sum_{k=m}^{n} a_k$ induktiv definiert werden. Summen können auch für endliche Folgen definiert werden. Wir verzeichten auf die Einzelheiten der Definition.

Durch vollständige Induktion beweist man leicht:

Satz 1.4.5. *Es seien $a, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) $\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$

(ii) $a \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a a_k$

(iii) $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ *(Dreiecksungleichung)*

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 1.4.8. Es sei $(a_n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge. Dann definieren wir die Folge $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)$ der <u>n- ten Partialprodukte</u> induktiv durch

(i) $n = 1$:

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1$$

(ii) $n \to n+1$:

$$\prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1}.$$

Es gelten die entsprechenden Bemerkungen wie bei der Definition der Partialsummen.

In Ausdrücken der Form $\sum_{k=1}^{n} a$ bzw. $\prod_{k=1}^{n} a$, bei denen der Folgenindex fehlt, werden die Partialsummen bzw. Partialprodukte von der <u>konstanten Folge</u> (a_k) mit $a_k = a$ für alle k gebildet.
Der Fall der Partialprodukte führt zur Definition der <u>Potenzen</u>:

Definition 1.4.9. (n- te Potenzen)
Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die <u>n- te Potenz</u> a^n (lies: a hoch n) durch $\prod_{k=1}^{n} a$ definiert.
Es ist $a^0 = 1$ und für $a \neq 0$ sei $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

Satz 1.4.6. *(Potenzgesetze)*
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$. Dann gelten folgende Regeln (vorausgesetzt die Ausdrücke sind definiert):

(i) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

(ii) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

Beweis. ohne Beweis. □

Satz 1.4.7. *(Monotonie, Definitheit)*
Es seien $a < b \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

(i) $a^n < b^n$, *falls* $n > 0$

(ii) $a^n > b^n$, *falls* $n < 0$

(iii) $a^2 \geq 0$ *und* $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 1.4.10. (Fakultät und Binomialkoeffizient)
Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ (lies: <u>n Fakultät</u>) durch

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k$$

definiert. Weiter ist $0! := 1$.
Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ (lies: n über k) ist für $k, n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq n$ durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

definiert.

Eine wichtige Technik im Rechnen mit Summenzeichen ist die <u>Indexverschiebung</u>. Bevor wir diese Technik in einem Satz formulieren, geben wir zwei Beispiele:

Beispiel 1.4.3. Es ist

$$\sum_{m=2}^{n} (m-2) = (2-2) + \ldots + (n-2).$$

Wir führen eine neue Summationsvariable ein: $k = m - 2$. Diese <u>Substitution</u> ist mit einer bijektiven Abbildung f des ursprünglichen Summationsintervalls $\{m \in \mathbb{N} \colon 2 \leq m \leq n\}$ auf das neue Summationsintervall $\{n \in \mathbb{N} \colon 0 \leq k \leq n-2\}$ verbunden. Damit ist

$$\sum_{m=2}^{n} (m-2) = (2-2) + \ldots + (n-2) = 0 + \ldots + (n-2) = \sum_{k=0}^{n-2} k.$$

Eine der bekanntesten Anwendungen ist die Summenformel für die <u>endliche geometrische Reihe</u>.

Beispiel 1.4.4. Es sei $q \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ und $N \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die endliche <u>geometrische Reihe</u>:

$$S := \sum_{n=0}^{N} q^n = 1 + q + \ldots + q^N.$$

Eine "skizzenhafte" Behandlung des Problems sieht wie folgt aus:
Differenzenbildung ergibt:

$$\begin{array}{rclllll} S & = & 1 & +q & +\ldots & +q^N & \\ qS & = & & q & +\ldots & +q^N & +q^{N+1} \\ \Rightarrow (1-q)S & = & 1 & & & & -q^{N+1} \end{array}$$

Somit ergibt sich: $S = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$.

Die mathematisch strenge Behandlung sieht wie folgt aus: es ist

$$S = \sum_{n=0}^{N} q^n. \tag{1}$$

Nach dem Distributivgesetz gilt

$$q \cdot S = \sum_{n=0}^{N} q \cdot q^n = \sum_{n=0}^{N} q^{n+1}.$$

Wir führen die neue Summationsvariable $m = n + 1$ ein und erhalten

$$q \cdot S = \sum_{m=1}^{N+1} q^m = \sum_{n=1}^{N+1} q^n \tag{2}$$

mit Zurückbenennung $m \to n$. Aus (1) und (2) erhalten wir

$$(1-q) \cdot S = \sum_{n=0}^{N} q^n - \sum_{n=1}^{N+1} q^n.$$

Die Summationsintervalle in beiden Summen sind $\{n \in \mathbb{N} |\ 0 \leq n \leq N\}$ bzw. $\{n \in \mathbb{N} |\ 1 \leq n \leq N+1\}$. Wir spalten die beiden Indizes, die nicht im Durchschnitt liegen, ab und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} q^n &= 1 + \sum_{n=1}^{N} q^n \\ \sum_{n=1}^{N+1} q^n &= \sum_{n=1}^{N} q^n + q^{N+1}. \end{aligned}$$

Differenzenbildung ergibt:

$$(1-q) \cdot S = 1 + \sum_{n=1}^{N} (q^n - q^n) - q^{N+1} = 1 - q^{N+1},$$

also

$$S = \frac{1 - q^{N+1}}{1-q}.$$

Satz 1.4.8. *Es sei (a_k) eine Folge. Es sei $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ und $p, q \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=m-q}^{n-q} a_{k+q}.$$

Beweis. ohne Beweis. □

Beispiel 1.4.5. Wir wollen $T_n := \sum\limits_{m=1}^{n} m$ bestimmen.

Wir betrachten $S_n := \sum\limits_{m=1}^{n} m^2$ und berechnen die Differenzen $S_{n+1} - S_n$ auf zwei verschiedene Weisen: Es ist

$$S_{n+1} = \sum_{m=1}^{n} m^2 + (n+1)^2 = S_n + (n+1)^2,$$

also

$$S_{n+1} - S_n = (n+1)^2. \tag{1}$$

Die Berechnung mittels Indexverschiebung lautet:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{m=1}^{n+1} m^2 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 = \sum_{m=0}^{n} (m+1)^2 = \sum_{m=0}^{n} (m^2 + 2m + 1) \\ &= \sum_{m=0}^{n} m^2 + 2 \sum_{m=0}^{n} m + \sum_{m=0}^{n} 1 = S_n + 2T_n + n + 1. \end{aligned}$$

Damit ist

$$S_{n+1} - S_n = 2T_n + n + 1. \tag{2}$$

Vergleich von (1) und (2) ergibt

$$(n+1)^2 = 2T_n + n + 1,$$

also

$$T_n = \sum_{m=1}^{n} m = \frac{n^2+n}{2} = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Die Behauptung $B(n)$ lässt sich auch durch vollständige Induktion beweisen:
Induktionsanfang $n = 1$:

$$\sum_{m=1}^{1} m = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1, \quad \text{also ist } B(1) \text{ wahr.}$$

Induktionsschritt $n \to n+1$:
Sei die Induktionshypothese für ein n richtig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n+1} m &= \sum_{m=1}^{n} m + (n+1) = T_n + n + 1 \underset{(IH)}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{2}n + 1\right) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

also ist $B(n)$ wahr.

Wir schließen mit Beispielen für Induktionsbeweise:

Satz 1.4.9. *(Bernoullische Ungleichung)*
Es sei $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Übungen. □

Als letztes wollen wir eine Regel über die Berechnung von $(a+b)^n$, den Binomischen Lehrsatz beweisen.
Zur Vorbereitung zeigen wir eine Beziehung zwischen Binomialkoeffizienten.

Lemma 1.4.2. *Es sei $k, n \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n-1$. Dann ist*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Beweis. Nach Definition 1.4.10 ist

$$(k+1)! = k! \cdot (k+1) \quad \text{und} \quad (n-k)! = (n-k-1)! \cdot (n-k)$$

Nach Definition 1.4.10 folgt:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)} + \frac{n!}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k-1)!} \\ &= \frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{((n+1)-(k+1))! \cdot (k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

□

Satz 1.4.10. *(Binomischer Lehrsatz)*
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang $n = 1$:

$$\begin{aligned} (a+b)^1 &= a^1 + b^1 \\ \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} &= \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = a + b. \end{aligned}$$

Induktionsschritt $n \to n+1$:
Es sei die Induktionshypothese für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig. Dann gilt

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} \underset{\text{Def. 1.4.9}}{=} (a+b)^n(a+b) &\underset{(IH)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \cdot (a+b) \\ \underset{\substack{\text{Satz 1.4.5}(ii) \\ \text{Def. 1.4.9}}}{=} & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}. \end{aligned}$$

Also ist

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}. \tag{1}$$

Wir spalten von der ersten Summe den Term $k = n$ und von der zweiten Summe den Term $k = 0$ ab und führen eine Indexverschiebung durch. Wir erhalten

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{(n+1)-(k+1)} + a^{n+1} \tag{2}$$

und

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{k+1} b^{(n+1)-(k+1)}. \tag{3}$$

Aus (1), (2), (3) und Lemma 1.4.2 erhalten wir

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) a^{k+1} b^{(n+1)-(k+1)} + a^{n+1} \\ &= b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} a^{k+1} b^{(n+1)-(k+1)} + a^{n+1} \\ &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \end{aligned}$$

$\square$

Kapitel 2

Folgen und Reihen

2.1 Folgen und Grenzwerte

Definition 2.1.1. (Grenzwert, Limes)
Eine Zahl a heißt Grenzwert (Limes) der Folge (a_n), (Schreibweise: $\lim a_n = a$, $a_n \to a$ $(n \to \infty)$, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}, \quad \text{so dass} \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{die Eigenschaft} \quad |a_n - a| < \epsilon \text{ gilt.}$$

Man sagt dann auch: Die Folge (a_n) konvergiert gegen a oder (a_n) ist eine konvergente Folge.
Hat (a_n) keinen Grenzwert, so heißt (a_n) divergent oder (a_n) divergiert.

Definition 2.1.2. Es sei $\epsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$. Unter der ϵ- Umgebung $U_\epsilon(a)$ versteht man

$$U_\epsilon(a) := \{x\colon |x - a| < \epsilon\}.$$

Man sagt: Eine Eigenschaft gilt für fast alle Elemente einer unendlichen Menge bzw. Glieder einer Folge, falls es höchstens endlich viele Elemente der Menge bzw. Glieder der Folge gibt, für die sie nicht gilt.

Bemerkung 2.1.1. Die Eigenschaft der Konvergenz lässt sich auch so ausdrücken:
Man nennt a den Grenzwert von (a_n), wenn in jeder ϵ- Umgebung $U_\epsilon(a)$ fast alle Glieder von (a_n) liegen.

Satz 2.1.1. *Eine Folge (a_n) hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Annahme:
Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ mit $a < b$. Wir setzen $\epsilon := \frac{b-a}{2}$. Es ist also

$$b - a = 2\epsilon \tag{1}$$

Nach Definition 2.1.1 gibt es ein $n_0 = n_0(\epsilon)$, so dass für alle $n \geq n_0$

$$|a_n - a| < \epsilon \tag{2}$$

gilt und ein $n_1 = n_1(\epsilon)$, so dass für alle $n \geq n_1$ gilt:

$$|b - a_n| < \epsilon \tag{3}$$

gilt. Es sei $n \geq \max\{n_0, n_1\}$. Aus (2) und (3) folgt nach der Dreiecksungleichung (Satz 1.4.5 (*iii*)):

$$|b - a| = |(b - a_n) + (a_n - a)| \leq |b - a_n| + |a - a_n| < 2\epsilon$$

im Widerspruch zu (1). $\square$

Satz 2.1.2. *(Grenzwerte von konstanten Folgen)*
Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

Beweis. Wir setzen $c_n := c$ für alle n. Dann ist $|c_n - c| = 0 < \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Definition 2.1.3. Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ für eine Folge (a_n), so heißt (a_n) eine <u>Nullfolge</u>.

Satz 2.1.3. *Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ ist eine Nullfolge, d.h. es ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.*

Beweis. Nach dem Vollständigkeitsaxiom besitzt die Menge

$$X = \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

ein Supremum S. Wegen $-\frac{1}{n} < 0$ für alle n ist 0 eine obere Schranke von $\left(-\frac{1}{n}\right)$, also ist $S \leq 0$.
<u>Annahme</u>: $S < 0$
Nach Definition des Supremums existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $-\frac{1}{n} > \frac{4}{3}S$. Dann ist aber $-\frac{1}{2n} > \frac{2}{3}S > S$, ein Widerspruch.
Damit ist $\sup\left\{\left(-\frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$, d.h. $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\epsilon)$ mit $-\frac{1}{n_0} > -\epsilon$ und somit $0 < \frac{1}{n_0} < \epsilon$.
Wegen $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ für $n \geq n_0$ folgt

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0(\epsilon).$$

Nach Definition 2.1.1 ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. $\square$

Definition 2.1.4. (Beschränktheit)
Eine Folge (a_n) heißt <u>nach oben beschränkt</u>, wenn ein $A \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert, bzw. <u>nach unten beschränkt</u>, wenn es ein $B \in \mathbb{R}$ mit $a_n \geq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt. Man nennt (a_n) <u>beschränkt</u>, falls es nach oben und nach unten beschränkt ist.

Satz 2.1.4. *(i) Die Folge $(n)_{n=1}^{\infty}$ ist <u>nach oben unbeschränkt</u>.*

(ii) Eine Folge (a_n) ist genau dann beschränkt, wenn ein $S \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|a_n| \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis. (i) <u>Annahme</u>:
Die Folge (n) ist beschränkt, d.h. es gibt ein $S \in \mathbb{R}$ mit $n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann folgt $\frac{1}{n} \geq S^{-1} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Satz 2.1.3).

(ii) Nach Definition 2.1.4 ist (a_n) genau dann beschränkt, wenn $A, B \in \mathbb{R}$ mit

$$B \leq a_n \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

existieren. Wir setzen $S := \max\{|A|, |B|\}$.
Aus (1) folgt

$$|a_n| \leq S \tag{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Umgekehrt folgt aus (2) mit $S > 0$ auch $-S \leq a_n \leq S$ und somit auch die Beschränktheit von (a_n).

$\square$

Satz 2.1.5. *Eine konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Nach Definition 2.1.1 mit $\epsilon = 1$ existiert ein $n_0 = n_0(1)$, so dass

$$|a_n - a| < 1 \quad \text{für} \quad n \geq n_0. \tag{1}$$

Aus (1) folgt

$$|a_n| \leq |a| + 1. \tag{2}$$

Nach Satz 1.4.3 (*ii*) existiert $M := \max\{|a_n|,\ n < n_0\} \cup \{|a| + 1\}$. Aus (2) folgt dann $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Es ist oft einfacher, Beweise über die Konvergenz von Folgen zu führen, indem man nicht direkt auf die Definition 2.1.1 zurückgeht, sondern den folgenden Satz verwendet:

Satz 2.1.6. *Für die Folge (a_n) sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

(ii) $\exists C > 0$*, so dass* $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\epsilon)$*, so dass* $\forall n \geq n_0(\epsilon)$ *die Aussage* $|a_n - a| < C\epsilon$ *gilt.*

Beweis. ”$\Rightarrow$”:
Es sei $\epsilon > 0$. Nach Definition 2.1.1 gibt es für alle $\epsilon' > 0$ ein $n_0 = n_0(\epsilon')$, so dass $|a_n - a| < \epsilon'$ für alle $n \geq n_0(\epsilon')$ ist. Dies gilt insbesondere auch für $\epsilon' = C\epsilon$, weshalb $|a_n - a| < \epsilon' = C\epsilon$ für $n \geq n_0(\epsilon')$ folgt.
”$\Leftarrow$”:
Es sei $\epsilon > 0$. Wir setzen $\epsilon' = C^{-1}\epsilon$. Dann gibt es nach Voraussetzung ein $n_0 = n_0(\epsilon')$, so dass $|a_n - a| < C\epsilon' = \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$ ist. Nach Definition 2.1.1 ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

Satz 2.1.7. *(Grenzwertsätze)*
Es seien (a_n) und (b_n) Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann ist

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = ab$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$*, falls* $b \neq 0$.

Beweis. (i) Es sei $\epsilon > 0$. Nach Definition 2.1.1 gibt es $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ und $n_1 = n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0(\epsilon)$ und $|b_n - b| < \epsilon$ für alle $n \geq n_1(\epsilon)$ gilt.
Es sei $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$. Dann ist für $n \geq n_2$ nach der Dreiecksungleichung (Satz 1.4.5 (*iii*))

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\epsilon.$$

Nach Satz 2.1.6 folgt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

(ii) Nach Satz 2.1.5 ist die Folge (b_n) beschränkt, d.h. es existiert ein $B \in \mathbb{R}$ mit

$$|b_n| \leq B \tag{1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es sei $\epsilon > 0$. Nach Definition 2.1.1 gibt es ein $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ und $n_1 = n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \epsilon \tag{2}$$

für alle $n \geq n_0$ und

$$|b_n - b| < \epsilon \tag{3}$$

für alle $n \geq n_1$. Es sei $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$. Dann ist für alle $n \geq n_2$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \underset{\Delta-\text{Ugl.}}{\leq} |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \\ &\underset{(1),(2),(3)}{<} (B + |a|) \cdot \epsilon. \end{aligned}$$

(iii) Nach Definition 2.1.1 gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| \leq \frac{|b|}{2}$ für alle $n \geq n_0$ ist, womit

$$|b_n| \geq \frac{1}{2} \cdot |b| \tag{1}$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Nach Definition 2.1.1 gibt es $n_1 = n_1(\epsilon)$ bzw. $n_2 = n_2(\epsilon)$, so dass für alle $n \geq n_1(\epsilon)$ bzw. für alle $n \geq n_2(\epsilon)$ dann $|a_n - a| < \epsilon$ bzw. $|b_n - b| < \epsilon$ gilt. Wir setzen $n_3 := \max\{n_1, n_2\}$ und erhalten

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \epsilon \tag{2}$$

für alle $n \geq n_3$. Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| &= \frac{1}{|bb_n|} |a_n b - ab_n| = \frac{1}{|bb_n|} |a_n b - ab + ab - ab_n| \\ &\underset{\Delta-\text{Ugl.}}{\leq} \frac{1}{|bb_n|} \left(|b||a_n - a| + |a||b_n - b| \right) \underset{(1),(2)}{\leq} \frac{2}{|b|^2} \left(|a| + |b| \right) \epsilon. \end{aligned}$$

□

Satz 2.1.8. *(Erhaltung von Ungleichungen)*
Es seien (a_n) und (b_n) Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ sowie $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a \leq b$, also $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

Beweis. Annahme: $a > b$
Wir setzen

$$2\epsilon := a - b. \tag{1}$$

Nach Definition 2.1.1 existiert $n_0 = n_0(\epsilon)$, so dass für alle $n \geq n_0(\epsilon)$ gilt:

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \epsilon. \tag{2}$$

Aus (2) folgt

$$a_n > a - \epsilon \quad \text{und} \quad b_n < b + \epsilon \tag{3}$$

für alle $n \geq n_0$. Aus (1) und (3) folgt $b_n < a_n$ für alle $n \geq n_0$, ein Widerspruch.
Nach Axiom $(A1)$ (Trichotomiegesetz) folgt $a \leq b$. □

Bemerkung 2.1.2. Aus der scharfen Ungleichung $a_n < b_n$ kann nicht $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ gefolgert werden, sondern auch nur $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$. Die sieht man am Beispiel $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n}$. Es ist $a_n < b_n$, aber $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Satz 2.1.9. *Es sei $q \in \mathbb{R}$ und $|q| < 1$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.*

Beweis. Fall 1: $q = 0$
Dann ist $\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

Fall 2:
Es sei $Q := |q|^{-1}$. Dann ist $Q = 1 + \eta$ mit einem $\eta > 0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung (Satz 1.4.9) ist $Q^n = (1+\eta)^n \geq 1 + n\eta$. Also ist $|q|^n = Q^{-n} \leq (1+n\eta)^{-1} \leq \eta^{-1}n^{-1}$ und damit $-\eta^{-1}n^{-1} \leq q^n \leq \eta^{-1}n^{-1}$. Nach den Sätzen 2.1.4, 2.1.7 und 2.1.8 ist

$$0 = \lim_{n\to\infty} \left(-\eta^{-1}n^{-1}\right) \leq \lim_{n\to\infty} q^n \leq \lim_{n\to\infty} \eta^{-1}n^{-1} = 0,$$

also $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. □

Beispiel 2.1.1. Es sei $a_n = 1 + \frac{1}{n} + 10^{-6}(-1)^n$.
Wir untersuchen, ob das Konvergenzkriterium von Definition 2.1.1 für $a = 1$ erfüllt ist.

Fall 1:
Es sei $\epsilon > 10^{-6}$. Dann können wir schreiben: $\epsilon = 10^{-6} + \eta_1$ mit $\eta_1 > 0$. Wir wählen $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $n_0 > \eta_1^{-1}$ ist. Für $n \geq n_0$ haben wir dann

$$|a_n - 1| = \left|\frac{1}{n} + 10^{-6}(-1)^n\right| < 10^{-6} + \eta_1 = \epsilon.$$

Fall 2:
Es sei $\epsilon \leq 10^{-6}$, z.B. $\epsilon = 10^{-6} - \eta_2$ mit $\eta_2 > 0$. Wir wählen $n_1 = n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $n_1 > \eta_2^{-1}$. Für $n \geq n_1$ haben wir dann

$$|a_n - 1| = \left|\frac{1}{n} + 10^{-6}(-1)^n\right| > 10^{-6} - \eta_2 = \epsilon.$$

Damit ist das Kriterium von Definition 2.1.1 mit $a = 1$ zwar im Fall $\epsilon > 10^{-6}$ erfüllt, aber nicht im Falle $\epsilon \leq 10^{-6}$. Somit konvergiert a_n nicht gegen 1.

Es gibt auch keinen anderen Grenzwert a.
Es sei $a \in \mathbb{R}$. Nach der Dreieicksungleichung ist

$$2 \cdot 10^{-6} = \left|\left(1 + 10^{-6} - a\right) - \left(1 - 10^{-6} - a\right)\right| \leq \left|1 + 10^{-6} - a\right| + \left|1 - 10^{-6} - a\right|.$$

Daraus folgt: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt einer der folgenden Fälle:

Fall a: $\left|a - \left(1 + 10^{-6}\right)\right| > 10^{-6}$ oder
Fall b: $\left|a - \left(1 - 10^{-6}\right)\right| > 10^{-6}$.

Wir zeigen, dass in Fall a) die Zahl a nicht der Grenzwert von (a_n) sein kann. Fall b) wird analog behandelt.
Es sei $n \geq 2 \cdot 10^6$. Dann ist für alle geraden n folglich $|a_n - a| \geq 10^{-6} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$.
Für $\epsilon = 10^{-6}$ ist das Kriterium von Definition 2.1.1 nicht erfüllt: es gibt kein $n_0(\epsilon)$, so dass für $n \geq n_0(\epsilon)$ dann $|a_n - a| < \epsilon$ gilt. Also ist a nicht Grenzwert von (a_n).

Es gibt jedoch Zahlen, nämlich $l_1 = 1 - 10^{-6}$ und $l_2 = 1 + 10^{-6}$, die schwächere Eigenschaften als das Konvergenzkriterium erfüllen. In beliebigen ϵ- Umgebungen $U_\epsilon(l_1)$ bzw. $U_\epsilon(l_2)$ liegen zwar nicht fast alle Glieder der Folge (a_n), aber doch unendlich viele. Die Zahlen l_1, l_2 sind Beispiele von Häufungswerten.

Definition 2.1.5. Es sei (a_n) eine Folge. Dann heißt a Häufungswert (HW) von (a_n), falls es für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U_\epsilon(a)$ gibt.

Satz 2.1.10. *Es sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Dann ist a genau dann Häufungswert von (a_n), wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ von (a_n) mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ gibt.*

Beweis. "$\Rightarrow$":
Es sei a Häufungswert von (a_n). Wir definieren durch vollständige Induktion eine Folge (n_k) mit $n_k \in \mathbb{N}$ und $n_{k+1} > n_k$, so dass $|a_{n_k} - a| < \dfrac{1}{k}$:
$k = 1$:
Nach Definition 2.1.5 gibt es ein n_1 mit $|a_{n_1} - a| < \dfrac{1}{k}$.
$k \to k+1$:
Es sei n_k schon definiert und $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$.
Nach Definition 2.1.5 gibt es $n_{k+1} > n_k$ mit $\left|a_{n_{k+1}} - a\right| < \frac{1}{k+1}$.
Nach Definition 2.1.1 ist $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = a$.

"$\Leftarrow$":
Es sei $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = a$. Weiter sei $\epsilon > 0$.
Dann gibt es nach Definition 2.1.1 ein $k_0 = k_0(\epsilon)$, so dass $|a_{n_k} - a| < \epsilon$ für ∞- viele k gilt. □

Beispiel 2.1.2. Es sei $a_n = 1 + \dfrac{1}{n} + 10^{-6}(-1)^n$ wie in Beispiel 2.1.1. Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} a_{2k} &= 1 + 10^{-6} = l_2 \quad \text{und} \\ \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} &= 1 - 10^{-6} = l_1. \end{aligned}$$

Satz 2.1.11. *(Existenz von Infimum und Supremum)*

(i) Eine nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen hat stets ein Supremum.

(ii) Eine nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen hat stets ein Infimum.

Beweis. (i) Dies ist das Vollständigkeitsaxiom (V).

(ii) Man betrachte die Menge $-X := \{-x|\ x \in X\}$. Dann gilt: s ist untere Schranke von $X \Leftrightarrow -s$ ist obere Schranke von $-X$. Also ist $\inf X = \sup(-X)$, und $\sup(-X)$ existiert nach (i).

□

Definition 2.1.6. (Monotonie)
Die Folge (a_n) heißt monoton wachsend (bzw. monoton fallend), wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$ für alle n) gilt. Gilt die scharfe Ungleichung $a_{n+1} > a_n$ (bzw. $a_{n+1} < a_n$), so heißt (a_n) streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend). Eine Folge heißt monoton, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und (a_n) monoton wachsend (bzw. fallend), so schreiben wir auch $a_n \uparrow a$ (bzw. $a_n \downarrow a$).

Satz 2.1.12. *(Monotoniekriterium)*
Eine beschränkte monotone Folge ist konvergent.

Beweis. Fall 1: (a_n) ist monoton wachsend:
Nach Satz 2.1.11 hat $X := \{a_n | \ n \in \mathbb{N}\}$ ein Supremum s. Es sei $\epsilon > 0$. Nach der Definition des Supremums gibt es ein $n_0 = n_0(\epsilon)$, so dass $a_{n_0} \geq s - \epsilon$. Wegen der Monotonie ist dann $s - \epsilon \leq a_n \leq s$ für alle $n \geq n_0$. Nach Definition 2.1.1 folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.
Fall 2: (a_n) ist monoton fallend:
Dann ist $(-a_n)$ monoton wachsend, und es ist $\lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty}(-a_n)$. □

Definition 2.1.7. Unter der Länge eines Intervalls $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ (Schreibweise: $|I|$), versteht man $|I| = b - a$.

Definition 2.1.8. (Intervallschachtelung)
Eine Folge (I_n) von kompakten Intervallen heißt Intervallschachtelung, wenn

(i) $I_{n+1} \subset I_n$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} |I_n| = 0$.

Satz 2.1.13. *Es sei (I_n) eine Intervallschachtelung, und $I_n = [a_n, b_n]$.*
Dann existiert genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \uparrow a$ und $b_n \downarrow a$ mit $n \to \infty$.

Beweis. Übungen. □

Satz 2.1.14. *(Bolzano- Weierstraß)*
Eine beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungswert.

Beweis. Es sei
$$s \leq c_n \leq t \tag{1}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s, t \in \mathbb{R}$.
Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass eine Intervallschachtelung (I_m) mit $|I_m| = (t-s)\cdot 2^{-m}$ und $c_n \in I_m$ für unendlich viele n existiert:
$m = 0$:
Wir setzen $I_0 := [s, t]$. Wegen (1) gilt $c_n \in I_0$ für alle n.
$m \to m + 1$:
Es sei $|I_m| = (t-s)\cdot 2^{-m}$, $I_m = [a_m, b_m]$ und $c_n \in I_m$ für unendlich viele n. Dann ist $I_m = I_{m,1} \cup I_{m,2}$ mit $I_{m,1} = \left[a_m, \frac{a_m+b_m}{2}\right]$ und $I_{m,2} = \left[\frac{a_m+b_m}{2}, b_m\right]$. Für mindestens ein $j \in \{1, 2\}$ ist $c_n \in I_{m,j}$ für unendlich viele n. Wir setzen $I_{m+1} := I_{m,j}$. Es ist $|I_{m+1}| = \frac{1}{2}|I_m| = (t-s)\cdot 2^{-(m+1)}$. Nach Satz 2.1.9 ist $|I_m| \to 0$ für $m \to \infty$. Nach Satz 2.1.13 gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a_m \uparrow a$ und $b_m \downarrow a$.
Es sei $\epsilon > 0$. Wegen $|I_m| \to 0$ für $m \to \infty$ existiert ein m mit $|I_m| < \epsilon$. Für die unendlich vielen n mit $c_n \in I_m$ gilt: $a_m < c_n < b_m$. Es folgt $|c_n - a| < \epsilon$. Damit ist a Häufungswert von (c_n). □

Definition 2.1.9. Eine Folge (a_n) heißt Cauchyfolge, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\epsilon)$ existiert, so dass für alle Paare $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ mit $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ gilt, dass $|a_m - a_n| < \epsilon$.

Satz 2.1.15. *(Cauchykriterium)*
Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Beweis. "$\Rightarrow$":
Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
Es sei $\epsilon > 0$. Nach Definition 2.1.1 existiert ein $n_0 = n_0(\epsilon/2)$, so dass $|a_n - a| < \epsilon/2$ für alle $n \geq n_0$ ist. Es sei $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Aus $|a_m - a| < \epsilon/2$ und $|a_n - a| < \epsilon/2$ folgt
$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) - (a_n - a)| \underset{\Delta-Ugl.}{\leq} |a_m - a| + |a_n - a| < \epsilon.$$
Damit ist (a_n) eine Cauchyfolge.

"$\Leftarrow$":
Es sei (a_n) eine Cauchyfolge.
Wenn wir in Definition 2.1.9 nun $\epsilon = 1$ setzen, erhalten wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_m - a_n| < 1$ für alle (m, n) mit $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ ist. Es sei $M := \max\{a_n |\ n \leq n_0\}$. Dann ist für $n \geq n_0$ gerade $|a_n| \leq |a_{n_0}| + 1$. Also ist $|a_n| \leq \max\{M, |a_{n_0}| + 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit ist (a_n) beschränkt.
Nach Satz 2.1.14 (Bolzano- Weierstraß) hat (a_n) einen Häufungswert a.
Es sei $\epsilon > 0$. Da (a_n) eine Cauchyfolge ist, gibt es $n_0 = n_0(\epsilon)$, so dass für $m, n \geq n_0(\epsilon)$ gilt

$$|a_m - a_n| < \epsilon. \tag{1}$$

Da a Häufungswert von (a_n) ist, gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 \geq n_0$, mit

$$|a_{m_0} - a| < \epsilon. \tag{2}$$

Da (1) auch für $m = m_0$ gilt, ist

$$|a_{m_0} - a_n| < \epsilon \tag{3}$$

für alle $n \geq n_0$. Aus (2) und (3) folgt

$$|a - a_n| < |a - a_{m_0} + a_{m_0} - a_n| \underset{\Delta-Ugl.}{\leq} |a - a_{m_0}| + |a_{m_0} - a_n| < 2\epsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Nach Satz 2.1.6 ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. □

Satz 2.1.16. *Die Menge H der Häufungswerte einer beschränkten Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei s eine obere Schranke der Folge (a_n), d.h. $a_n \leq s$ für alle n. Weiter sei $a = s + \epsilon$ mit $\epsilon > 0$. Dann ist $a_n \notin U_\epsilon(a)$ für alle n. Also ist a kein Häufungswert von (a_n). Für jeden Häufungswert a von (a_n) gilt also $a \leq s$.
Analog zeigt man: $a \geq u$ für jede untere Schranke u von (a_n). □

Definition 2.1.10. Es sei (a_n) eine beschränkte Folge und H die Menge aller Häufungswerte der Folge (a_n). Dann definiert man

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n &:= \limsup_{n\to\infty} a_n := \sup H \quad \text{und} \\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n &:= \liminf_{n\to\infty} a_n := \inf H \end{aligned}$$

(Sprich: Limes Superior und Limes Inferior).

Satz 2.1.17. *Für eine beschränkte Folge (a_n) existieren stets $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und sind eindeutig bestimmt.*
Insbesondere sind $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ der größte bzw. der kleinste Häufungswert von (a_n).

Beweis. Die Existenz folgt aus Satz 2.1.16 und die Eindeutigkeit aus der Eindeutigkeit des Supremums und des Infimums.
Es sei H die Menge der Häufungswerte von (a_n) und $l := \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, also nach Definition 2.1.10 ist $l = \sup H$. Es sei $\epsilon > 0$. Da l die kleinste obere Schranke von H ist, gibt es einen Häufungswert w von (a_n) mit $l - \epsilon/2 < w \leq l$. Nach Definition 2.1.5 gibt es unendlich viele n, so dass $a_n \in U_{\epsilon/2}(w)$. Für diese n gilt

$$|a_n - l| \leq |(a_n - w) + (w - l)| \underset{\Delta-\text{Ugl.}}{\leq} |a_n - w| + |w - l| < \epsilon.$$

Also ist $a_n \in U_\epsilon(l)$.Damit ist $l \in H$, also ist $l = \max H$.
Analog zeigt man $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \in H$. □

Satz 2.1.18. *Es sei* (a_n) *eine beschränkte Folge und* $l \in \mathbb{R}$.

(i) *Es ist genau dann* $l = \limsup_{n\to\infty} a_n$, *wenn es für alle* $\epsilon > 0$ *unendlich viele* n *mit* $a_n > l - \epsilon$, *aber höchstens endlich viele* n *mit* $a_n > l + \epsilon$ *gibt.* $(*)$

(ii) *Es ist genau dann* $l = \liminf_{n\to\infty} a_n$, *wenn es für alle* $\epsilon > 0$ *unendlich viele* n *mit* $a_n < l + \epsilon$, *aber höchstens endlich viele* n *mit* $a_n < l - \epsilon$ *gibt.*

Beweis. Wir zeigen nur (i).
"$\Rightarrow$":
Es sei $l = \limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\epsilon > 0$. Nach Satz 2.1.17 ist l ein Häufungswert von (a_n).
Nach Definition 2.1.5 gibt es unendlich viele n mit $a_n \in U_\epsilon(l) = (l - \epsilon, l + \epsilon)$. Für diese n gilt insbesondere $a_n > l - \epsilon$.
Annahme: es existieren unendlich viele n mit $a_n > l + \epsilon$.
Es sei $X = \{n\colon a_n > l + \epsilon\}$. Dann ist X eine unendliche Menge.
Es sei $X = \{n_k\colon k \in \mathbb{N}\}$ mit $n_k < n_{k+1}$. Dann ist $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ eine unendliche beschränkte Teilfolge von (a_n). Diese hat nach Satz 2.1.14 (Bolzano- Weierstraß) einen Häufungswert l'. Wäre $l' \leq l$, so gäbe es keine n_k mit $a_{n_k} \in U_\epsilon(l')$ im Widerspruch zur Definition von l' als Häufungswert von (a_{n_k}). Also muss $l' > l$ sein, was im Widerspruch zur Tatsache steht, dass l der größte Häufungswert von (a_n) ist. Damit gilt $(*)$.

"$\Leftarrow$":
Wir nehmen die Gültigkeit von $(*)$ an. Dann ist l ein Häufungswert von (a_n). Es sei $l' = l + 2\epsilon$ mit $\epsilon > 0$. Dann gibt es höchstens endlich viele n mit $a_n \in U_\epsilon(l')$. Also ist l' kein Häufungswert. □

Bemerkung 2.1.3. Für $l = \limsup_{n\to\infty} a_n$ gibt es nach Satz 2.1.18 höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > l + \epsilon$. Es kann jedoch unendlich viele n mit $a_n > l$ geben, wie das Beispiel $a_n = \frac{1}{n}$ und $l = 0$ zeigt.

Satz 2.1.19. *Es sei* (a_n) *eine beschränkte Folge. Die Folge ist genau dann konvergent, wenn sie nur einen einzigen Häufungswert besitzt.*
In diesem Fall ist dann

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Beweis. "$\Leftarrow$":
Es sei $H = \{l\}$ mit $l \in \mathbb{R}$. Dann ist $\inf H = \sup H = l$, also

$$l = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Es sei $\epsilon > 0$. Nach Satz 2.1.18 (i) gibt es höchstens endlich viele n mit $a_n > l + \epsilon$ und nach (ii) höchstens endlich viele n mit $a_n < l - \epsilon$. Also gilt für fast alle n:

$$a_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon) = U_\epsilon(l).$$

Nach Definition 2.1.1 bedeutet dies $\lim_{n\to\infty} a_n = l$.

"$\Rightarrow$":
Es sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann ist nach Satz 2.1.18 sowohl $a = \limsup_{n\to\infty} a_n$, als auch $a = \liminf_{n\to\infty} a_n$.
Damit ist $H = \{a\}$. □

Man kann nun die in diesem Abschnitt definierten Konzepte noch erweitern, indem man die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zur Menge $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit den neuen Elementen ∞ (unendlich) und $-\infty$ (minus unendlich) erweitert. Diese Objekte ∞ und $-\infty$ können dann als uneigentliche Grenzwerte, Häufungswerte, etc. auftreten.

Definition 2.1.11. (Umgebungen von ∞ und $-\infty$)
Es sei $c \in \mathbb{R}$. Unter der c- Umgebung von ∞ ($U_c(\infty)$) bzw. der c- Umgebung von $-\infty$ ($U_c(-\infty)$) versteht man

$$\begin{aligned} U_c(\infty) &:= (c, \infty) = \{x \colon x > c\} \quad \text{bzw.} \\ U_c(-\infty) &:= (-\infty, c) = \{x \colon x < c\}. \end{aligned}$$

Definition 2.1.12. Es sei (a_n) eine Folge. Man sagt, (a_n) divergiert gegen ∞ bzw. gegen $-\infty$ (Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $a_n \to \infty$ für $n \to \infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $a_n \to -\infty$ für $n \to \infty$), wenn für alle $c > 0$ für fast alle n gilt, dass $a_n \in U_c(\infty)$ bzw. $a_n \in U_c(-\infty)$ ist.
Dann heißen ∞ bzw. $-\infty$ uneigentlicher Grenzwert von (a_n).

Beispiel 2.1.3. Nach Satz 2.1.4 ist $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

Definition 2.1.13. Man nennt ∞ bzw. $-\infty$ uneigentliche Häufungswerte der Folge (a_n), wenn für alle $c > 0$ es unendlich viele n mit $a_n \in U_c(\infty)$ bzw. $a_n \in U_c(-\infty)$ gibt.

Definition 2.1.14. Es sei $X \subset \mathbb{R}$ nach oben (bzw. nach unten) unbeschränkt.
Dann schreiben wir $\sup X = \infty$ (bzw. $\inf X = -\infty$).

Definition 2.1.15. Es sei (a_n) eine Folge und H die Menge der eigentlichen und uneigentlichen Häufungswerte von (a_n). Dann setzen wir

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup H \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \inf H.$$

2.2 Die n- te Wurzel

Satz 2.2.1. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, \infty)$. Dann gibt es genau ein $y \geq 0$, so dass $y^n = x$ ist.*

Beweis. Es sei $W := \{z |\ z \in [0, \infty), z^n \leq x\}$. Nach der Bernoullischen Ungleichung (Satz 1.4.9) gilt für $z \geq 1 + \frac{x}{n}$

$$z^n \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = x + 1 > x.$$

Damit ist W beschränkt und nach Satz 2.1.11 existiert $y_0 := \sup W$.

Wir zeigen im folgenden: $y_0^n = x$.
Annahme: $y_0^n < x$:
Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $x = y_0^n + \delta$. Wir setzen

$$\begin{aligned} M &:= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} y_0^k, \\ \epsilon &:= \min\left\{\frac{1}{2}\delta M^{-1}, 1\right\} \quad \text{und} \\ z &:= y_0 + \epsilon. \end{aligned}$$

Wegen $\epsilon \leq 1$ ist $\epsilon^m \leq \epsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nach dem Binomischen Lehrsatz (Satz 1.4.10) ist dann

$$z^n = (y_0 + \epsilon)^n = y_0^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} y_0^k \epsilon^{n-k} \leq y_0^n + M\epsilon \leq y_0^n + \frac{1}{2}\delta < x.$$

Damit ist $z \in W$ mit $z > y_0$, ein Widerspruch.

<u>Annahme:</u> $y_0^n > x$:
Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $x = y_0^n(1-\delta)$. Es sei $\epsilon := \min\left\{\frac{1}{2}n^{-1}\delta, \frac{1}{2}\right\}$ und $z = y_0(1-\delta)$. Nach der Bernoullischen Ungleichung ist

$$z^n = y_0^n(1-\epsilon)^n \geq y_0^n(1-n\epsilon) > x.$$

Damit ist z eine obere Schranke von W mit $z < y_0$, ein Widerspruch.
Es ist also $y_0^n = x$.
Weiter ist

$$\begin{aligned} 0 < z < y_0 \quad &\Rightarrow \quad z^n < y_0^n = x \\ z > y_0 \quad &\Rightarrow \quad z^n > y_0^n = x. \end{aligned}$$

Also gilt $y^n = x$ mit $y \geq 0$ genau dann, wenn $y = y_0$ ist. $\square$

2.3 Unendliche Reihen

Definition 2.3.1. Es sei (a_n) eine Zahlenfolge.
Unter der <u>unendlichen Reihe</u> (kurz: Reihe) $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ (sprich: Summe $m = 1$ bis unendlich a_m) versteht man die Folge $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ der <u>Partialsummen</u> $S_n = \sum\limits_{m=1}^{n} a_m$. Die Reihe $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ heißt konvergent, falls

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} a_m =: S$$

existiert. Man schreibt dann $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m = s$ und nennt S den <u>Wert</u> der unendlichen Reihe.
Ist $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ nicht konvergent, so heißt es divergent.

Bemerkung 2.3.1. Man kann allgemeiner auch unendliche Reihen der Form $\sum\limits_{m=k}^{\infty} a_m$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ betrachten. Die Änderung in der Definition ist offensichtlich.

Definition 2.3.2. Es sei $q \in \mathbb{R}$. Unter der (unendlichen) <u>geometrischen Reihe</u> versteht man $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.

Satz 2.3.1. *Für* $|q| < 1$ *ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.
Für $|q| \geq 1$ *ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ *divergent.*

Beweis. Für die Folge der Partialsummen $S_k := \sum_{n=0}^{k} q^n$ gilt: $S_{k+1} - S_k = q^{k+1}$. Nach dem Cauchykriterium (2.1.15) ist die unendliche Reihe höchstens dann konvergent, wenn $S_{k+1} - S_k \to 0$ für $k \to \infty$, also für $|q| < 1$.
Nach Beispiel 1.4.5 ist $S_k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$. Nach Satz 2.1.9 ist $\lim_{k\to\infty} q^{k+1} = 0$ für $|q| < 1$. Es gilt also $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$.
Für $|q| \geq 1$ ist die unendliche Reihe divergent. □

Beispiel 2.3.1. Wir bestimmen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.
Es ist

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Folglich ist

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

Satz 2.3.2. *(Grenzwertsätze)*
Es seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, und es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann konvergieren die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a \cdot a_k$, und es gilt

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

(ii) $a \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a \cdot a_k$

(iii) Ist $a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann gilt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Beweis. Wir beweisen nur (i):
Es seien $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$ die Partialsummen der beiden Reihen. Nach Definition 2.3.1 ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) \right) = \lim_{n\to\infty} (S_n + T_n) \underset{S.2.1.7}{=} \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

□

2.4 Konvergenzkriterien für unendliche Reihen

Satz 2.4.1. *Für eine konvergente Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis. Mit $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ ist $S_{k+1} - S_k = a_{k+1}$.
Die Behauptung folgt nach dem Cauchykriterium.

Bemerkung 2.4.1. Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ folgt nicht die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, wie wir bald in Beispielen sehen werden.

□

Definition 2.4.1. (absolute Konvergenz)
Eine unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Satz 2.4.2. *(i) Eine absolut konvergente Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist konvergent, und es ist*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

(ii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist genau dann absolut konvergent, wenn die Folge der Partialsummen* $\sum_{m=1}^{n} |a_m|$ *beschränkt ist.*

Beweis. (i) Wir wenden das Cauchykriterium (Satz 2.1.15) auf die konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ an.
Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $n_0 = n_0(\epsilon)$, so dass $\sum_{n_1 < k \leq n_2} |a_k| < \epsilon$ für alle $n_1, n_2 \geq n_0$.
Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\sum_{n_1 < k \leq n_2} a_k \leq \sum_{n_1 < k \leq n_2} |a_k| < \epsilon.$$

Aus der anderen Richtung des Cauchykriteriums folgt die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Es seien $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $T_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. Nach der Dreiecksungleichung ist $|S_n| \leq T_n$.
Nach Satz 2.1.8 (Erhaltung von Ungleichungen) folgt

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| = \left|\lim_{n\to\infty} S_n\right| \leq \lim_{n\to\infty} T_n = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

(ii) Die Folge (T_n) ist monoton wachsend. Die Behauptung folgt aus Satz 2.1.5 und Satz 2.1.12 (Monotoniekriterium).

□

Satz 2.4.3. *(Leibnizkriterium)*

Es sei $a_n \downarrow 0$. *Dann ist* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konvergent.*

Beweis. Es sei $S_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n$. Weiter ist

$$\begin{aligned} S_{2m+1} &= S_{2m} + (-1)^{2m+1} a_{2m+1} \leq S_{2m} \\ S_{2m+3} &= S_{2m+1} + (-1)^{2m+2}(a_{2m+2} - a_{2m+3}) \geq S_{2m+1} \\ S_{2m+2} &= S_{2m} + (-1)^{2m+1}(a_{2m+1} - a_{2m+2}) \leq S_{2m} \end{aligned}$$

Wir setzen $I_m := [S_{2m+1}, S_{2m}]$, für das wegen den obigen Ungleichungen $I_{m+1} \subset I_m$ folgt.
Es ist $|I_m| = |S_{2m} - S_{2m+1}| = |a_{2m}| \downarrow 0$. Nach Definition 2.1.8 ist die Folge (I_m) eine Intervallschachtelung. Nach Satz 2.1.13 existiert genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit $S_{2m+1} \uparrow a$ und $S_{2m} \downarrow a$. □

Satz 2.4.4. *(Majorantenkriterium)*

Es seien (a_n) *und* (b_n) *Folgen mit* $|a_n| \leq b_n$. *Es sei* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergent. Dann ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent, und es ist* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Beweis. Für die Folge der Partialsummen $S_n := \sum_{m=1}^{n} |a_m|$ gilt:

$$S_n \leq \sum_{m=1}^{n} b_n \leq \sum_{m=1}^{\infty} b_n.$$

Damit ist (S_n) beschränkt und konvergiert nach Satz 2.1.12 (Monotoniekriterium). □

Definition 2.4.2. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt <u>konvergente Majorante</u> der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beispiel 2.4.1. Wir betrachten $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Aus der Ungleichung $k+1 \leq 2k$ folgt $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$. Nach Beispiel 2.3.1 ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = 2$.
Damit ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$ eine konvergente Majorante von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Nach Satz 2.4.4 ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent.

Bemerkung 2.4.2. Mit dem Majorantenkriterium kann die Frage der Konvergenz einer unendlichen Reihe entschieden werden. Der Wert der Reihe kann jedoch nicht bestimmt werden. In Beispiel 2.4.1

ist der Wert der Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = 2$ sehr einfach zu bestimmen, nicht jedoch der Wert von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Satz 2.4.5. *(Minorantenkriterium)*
Es seien (a_n) und (b_n) Folgen mit $0 \leq a_n \leq b_n$. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.

Beweis. Annahme: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert. Dann ist nach dem Majorantenkriterium $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, ein Widerspruch. □

Definition 2.4.3. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt divergente Minorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Definition 2.4.4. Es sei (a_n) eine Folge und $a_n \geq 0$.
Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so schreibt man auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent, so schreibt man auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Zwei wichtige Kriterien, das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium erhält man, wenn man eine Reihe mit der geometrischen Reihe als Majorante oder Minorante vergleicht.

Satz 2.4.6. *(Quotientenkriterium)*
Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$.

(i) Ist $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(ii) Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für alle $n \geq n_0$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis. (i) Es sei $l := \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Dann ist $l = 1 - 2\epsilon$ mit $\epsilon > 0$. Es sei $q := 1 - \epsilon$.

Nach Satz 2.1.18 gibt es ein n_0, so dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für $n \geq n_0$ ist. Durch vollständige Induktion nach k zeigt man, dass $|a_{n_0+k}| \leq |a_{n_0}|q^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist. Somit ist

$$\sum_{n=1}^{n_0+k} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{n_0} |a_n| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_0}|q^k < \infty.$$

Die Folge der Partialsummen $\sum_{n=1}^{N} |a_n|$ ist also beschränkt. Damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent.

(ii) Aus $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für alle $n \geq n_0$ folgt $|a_n| \geq |a_{n_0}|$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist das Konvergenzkriterium $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ von Satz 2.4.1 nicht erfüllt, und damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

□

Satz 2.4.7. *(Wurzelkriterium)*
Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge. Es sei $l := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann gilt

(i) Wenn $l < 1$ ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

(ii) Wenn $l > 1$ ist, dann divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis. (i) Aus $l < 1$ folgt $l = 1 - 2\epsilon$ mit $\epsilon > 0$. Es sei $q := 1 - \epsilon$. Nach Satz 2.1.18 gibt es ein n_0, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für $n \geq n_0$ ist. Also ist $|a_n| \leq q^n$ für $n \geq n_0$. Somit ist

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{n_0} |a_n| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} q^n < \infty.$$

Die Folge der Partialsummen $\sum_{n=1}^{N} |a_n|$ ist also beschränkt. Damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(ii) Aus $l > 1$ folgt $l = 1 + \epsilon$ mit $\epsilon > 0$. Nach Satz 2.1.18 gibt es ein n_0, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für $n \geq n_0$ ist. Damit ist das Konvergenzkriterium $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ von Satz 2.4.1 nicht erfüllt, und damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

□

Es gibt Fälle, in denen weder das Quotienten- noch das Wurzelkriterium geeignet sind, die Frage der Konvergenz oder Divergenz einer unendlichen Reihe zu entscheiden. In diesen Fällen führen oft andere Kriterien zur Antwort. Wir werden später die sogenannten Integralkriterien kennenlernen.

Wir begnügen uns zunächst mit

Satz 2.4.8. *(Cauchyscher Verdichtungssatz)*
Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton fallend und $a_n \geq 0$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergent, wenn die (verdichtete) Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

Beweis. Wir schreiben die Partialsumme $S_{2^{N+1}} = \sum_{n=1}^{2^{N+1}} a_n$ mit $N \in \mathbb{N}$ in der Form

$$S_{2^{N+1}} = \sum_{n=0}^{N+1} S_{2^n} \sum_{n=0}^{N} S_{2^n} = \sum_{n=0}^{N} (S_{2^{n+1}} - S_{2^n}) + S_1.$$

Es ist

$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} = \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \quad \begin{cases} \geq 2^n a_{2^{n+1}} \\ \leq 2^n a_{2^n+1} \end{cases}$$

Deshalb folgt, dass

$$S_{2^{N+1}} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} 2^{n+1}a_{2^{n+1}} + a_1 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N+1} 2^n a_{2^n} + \frac{a_1}{2}$$

und

$$S_{2^{N+1}} \leq \sum_{n=0}^{N} 2^n a_{2^n+1} + a_1 \leq \sum_{n=0}^{N} 2^n a_{2^n} + a_1.$$

Also ist die Folge $(S_{2^{N+1}})_{N=0}^{\infty}$ genau dann beschränkt, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ beschränkt ist. Weil die Folge $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ monoton wächst, ist $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ genau dann beschränkt, wenn $(S_{s^{N+1}})_{N=0}^{\infty}$ beschränkt ist. Die Behauptung folgt nach Satz 2.4.2 (ii). $\square$

Definition 2.4.5. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ heißt harmonische Reihe.

Satz 2.4.9. *Die harmonische Reihe ist divergent:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Beweis. Nach Satz 2.4.8 (Cauchyscher Verdichtungssatz) ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ genau dann divergent, wenn die "verdichtete Reihe" $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n}$ divergiert. Dies ist der Fall. $\square$

Bemerkung 2.4.3. Die harmonische Reihe liefert somit ein Beispiel dafür, dass die Umkehrung von Satz 2.4.1 nicht gilt: Setzen wir $a_n = \frac{1}{n}$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.
Weiter lässt sich aus der harmonischen Reihe ein Beispiel für eine Reihe angeben, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Die "alternierende harmonische Reihe" $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert nach Satz 2.4.3 (Leibnizkriterium). Durch Bildung der Absolutbeträge entsteht jedoch die harmonische Reihe, welche divergiert.
Die Divergenz der harmonischen Reihe kann weder mit dem Quotienten- noch mit dem Wurzelkriterium entschieden werden, wie wir gleich sehen werden.

Wir wollen im folgenden Wurzel- und Quotientenkriterium vergleichen:
Als Vorbereitung beweisen wir

Satz 2.4.10. *Für* $a > 0$ *ist* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Beweis.

(i) Wir nehmen zunächst $a > 1$ an:
Es sei $\sqrt[n]{a} = 1+\epsilon_n$ mit $\epsilon_n > 0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung ist $a = (1+\epsilon_n)^n \geq 1+n\epsilon_n$, also $\epsilon_n \leq \frac{a-1}{n}$. Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(ii) Ist $a < 1$, so wenden wir (i) mit $\frac{1}{a}$ an.

(iii) Für $a = 1$ ist die Behauptung klar.

$\square$

Satz 2.4.11. *Es sei (a_n) eine Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

(iii) Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ *existiert, dann existiert auch der Grenzwert* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$*, und es gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Beweis. Wir beweisen nur (i):
Es sei $l := \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ und $\delta > 0$. Nach Satz 2.1.18 gibt es ein $n_0 = n_0(\delta)$, so dass $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ für alle $n \geq n_0$ ist. Durch vollständige Induktion folgt $\frac{a_{n_0+l}}{a_{n_0}} \leq q^l$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Wir setzen $n := n_0 + l$ und erhalten $a_n \leq q^{n-n_0} a_{n_0}$. Es folgt $\sqrt[n]{a_n} \leq q \sqrt[n]{q^{-n_0} a_{n_0}}$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q^{-n_0} a_{n_0}}$ gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_1 = n_1(\epsilon)$, so dass $\sqrt[n]{a_n} \leq q + \epsilon$ für alle $n \geq n_1$ ist. □

Beispiel 2.4.2. Die unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$ ist konvergent, denn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1.$$

Beispiel 2.4.3. Es sei $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n^2}$.
Weder Quotienten- noch Wurzelkriterium sind geeignet, die Frage der Konvergenz der (divergenten) Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ oder der (konvergenten) Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ zu entscheiden. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

und auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1$ (nach Satz 2.4.11 (iii)).
Nach Satz 2.4.11 (i) ist $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Kann daher die Konvergenz einer Reihe mit dem Quotientenkriterium nachgewiesen werden, so auch mit dem Wurzelkriterium. Die Umkehrung gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt. Das Wurzelkriterium ist also stärker als das Quotientenkriterium.

Beispiel 2.4.4. Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $a_n = \begin{cases} 2^{-n}, & \text{für} \quad n = 2m \\ n \cdot 2^{-n}, & \text{für} \quad n = 2m+1 \end{cases}$. es ist

$$\frac{a_{2m+1}}{a_{2m}} = \frac{1}{2}(2m+1) \to \infty, \quad \text{also } \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty.$$

Es ist aber

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[2m+1]{(2m+1)2^{-(2m+1)}} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{m\to\infty} \sqrt[2m]{2^{-(2m)}} = \frac{1}{2}$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Das Wurzelkriterium zeigt also die Konvergenz der unendlichen Reihe, während das Quotientenkriterium keine Antwort liefert.

2.5 Bedingte und unbedingte Konvergenz, Produktreihen

Definition 2.5.1. Unter der Umordnung einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ versteht man eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$, wobei n_k durch eine bijektive Abbildung $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \to \tau(k) = n_k$ gegeben ist.

Beispiel 2.5.1. Es sei die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ gegeben. Die bijektive Abbildung $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \to \tau(k) = n_k$ sei durch

$$\begin{aligned} \tau(3m) &= 2m \\ \tau(3m-2) &= 4m-3 \quad \text{und} \\ \tau(3m-1) &= 4m-1 \end{aligned}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ definiert. Dann haben wir die Umordnung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \dots$$

Diese umgeordnete Reihe kann auch folgendermaßen erhalten werden: Es sei $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, also

$$\begin{array}{rcccccccccc} s &=& 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & \pm\dots \\ \frac{1}{2}s &=& & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & +\frac{1}{6} & & -\frac{1}{8} & \pm\dots \end{array}$$

Dann ist

$$\frac{3}{2}s = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \pm \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k}.$$

Die umgeordnete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k}$ hat also einen anderen Wert als die ursprüngliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definition 2.5.2. Eine konvergente Reihe heißt unbedingt konvergent, wenn jede Umordnung von ihr gegen denselben Wert konvergiert, sonst bedingt konvergent.

Satz 2.5.1. *(Umordnungssatz)*
Eine Reihe ist genau dann unbedingt konvergent, wenn sie absolut konvergiert.

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 2.5.3. (Cauchyprodukt)
Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ unendliche Reihen. Dann ist das Cauchyprodukt durch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ definiert, wobei

$$c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} b_l$$

bedeute.

Satz 2.5.2. *Es seien* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *absolut konvergent. Dann ist das Cauchyprodukt* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *mit* $c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l$ *absolut konvergent, und es gilt die Cauchysche Produktformel*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Beweis. ohne Beweis. □

2.6 Dezimalbruchentwicklung

Definition 2.6.1. Es sei $g \in \mathbb{N}$ und $g \geq 2$. Unter der g- Bruchentwicklung von $a \in [0, \infty)$ versteht man eine Darstellung der Form

$$a = \sum_{m=0}^{n} a_m g^m + \sum_{n=1}^{\infty} b_n g^{-n}, \qquad (*)$$

wobei $a_m \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$ und $b_n \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$ mit $a_m \neq 0$ für $m > 0$ ist und folgende Form ausgeschlossen ist: $b_n = g - 1$ für alle $n \geq n_0$.

Bemerkung 2.6.1. Für $g = 10$ erhält man die vertraute Dezimalbruchentwicklung:
Für $a = \frac{1}{3}$ erhalten wir $a = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-n} = 0,33\ldots = 0,\overline{3}$.
Es ist also in $(*)$ dann $g = 10$, $a_m = 0$ für alle $m \geq 0$ und $b_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 2.6.1. *Es sei* $g \in \mathbb{N}$ *und* $g \geq 2$. *Jedes* $a \in [0, \infty)$ *besitzt genau eine* g*- Bruchentwicklung der Form* $(*)$.

Kapitel 3

Stetigkeit, Differenzierbarkeit

3.1 Grenzwerte von Funktionen

Definition 3.1.1. (Häufungspunkt)
Es sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt $\xi \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt (HP) von $\mathcal{D}$, wenn in jeder Umgebung $U_\epsilon(\xi)$ ein $x \in \mathcal{D}\backslash\{\xi\}$ liegt.
Ein $\xi \in \mathcal{D}$, das nicht Häufungspunkt von $\mathcal{D}$ ist, heißt isolierter Punkt.

Bemerkung 3.1.1. Ein Häufungspunkt von $\mathcal{D}$ braucht nicht zu $\mathcal{D}$ gehören.
Ist $\mathcal{D} = (a, b)$ mit $a < b \in \mathbb{R}$, so sind a und b Häufungspunkte von $\mathcal{D}$, gehören aber nicht zu $\mathcal{D}$.

Definition 3.1.2. Es sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ mit $x \to f(x)$ eine Funktion und x_0 ein Häufungspunkt von $\mathcal{D}$.
Dann heißt $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_0 (Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$, $(x \to x_0)$), falls gilt, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ existiert, so dass $|f(x) - a| < \epsilon$ für alle x mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt.

Ein sehr wichtiges Hilfsmittel zum Beweis von Aussagen über Grenzwerte von Funktionen ist das Folgenkriterium. Dadurch können die aus Kapitel 2 bekannten Tatsachen über die Grenzwerte von Folgen zur Anwendung gebracht werden.

Satz 3.1.1. *(Folgenkriterium)*
Es sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und x_0 ein HP von $\mathcal{D}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$

(ii) Für jede Folge $(z_n)_{n=1}^\infty$ mit $z_n \in \mathcal{D}\backslash\{x_0\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = a.$$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$:
Es sei $(z_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge mit $z_n \in \mathcal{D}\backslash\{x_0\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$.
Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Nach Definition 3.1.2 existiert ein $\delta = \delta(\epsilon)$, so dass für alle $x \in \mathcal{D}$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - a| < \epsilon \tag{$*$}$$

gilt.

Nach Definition 2.5.3 existiert ein $n_0 = n_0(\delta)$, so dass $|z_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Wegen $(*)$ ist dann auch $|f(z_n) - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Nach Definition 2.5.3 bedeutet dies

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = a.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$:
Annahme: Die Aussage $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ ist falsch.
Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein z_n mit $|z_n - x_0| < \frac{1}{n}$ mit $z_n \in \mathcal{D}\backslash\{x_0\}$ und $|f(z_n) - a| > \epsilon$ existiert. Dann ist nach Definition 2.5.3 die Aussage $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = a$ falsch, ein Widerspruch. □

Satz 3.1.2. *(Eindeutigkeit des Grenzwerts)*
Es sei $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und x_0 ein HP von $\mathcal{D}$. Dann hat die Funktion f höchstens einen Grenzwert an der Stelle a.

Beweis. Dies folgt aus dem Folgenkriterium (Satz 3.1.1) und der Eindeutigkeit des Grenzwerts für Folgen (Satz 2.1.8). □

Satz 3.1.3. *(Grenzwertsätze)*
Es sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, x_0 ein HP von $\mathcal{D}$ und $f, g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ mögen existieren. Dann existieren auch die Grenzwerte

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)),$$

und es ist

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \quad \textit{und} \\ \lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x). \end{aligned}$$

Ist $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, so gibt es eine Umgebung $U_\delta(x_0)$, so dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathcal{D} \cap U_\delta(x_0)$ gilt. Es sei $h = \frac{f}{g}|_{\{x|\ g(x)\neq 0\}\cap\mathcal{D}}$. Dann ist

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Beweis. Es sei $b := \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$. Wir wenden Definition 3.1.2 mit $\epsilon = \frac{|b|}{2}$ an. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in U_\delta(x_0)$ gilt: $|g(x) - b| < \frac{|b|}{2}$ und damit $g(x) \neq 0$.
Alle anderen Aussagen werden bewiesen, indem man das Folgenkriterium und die entsprechenden Grenzwertsätze für Folgen (Satz 2.1.14) anwendet. □

3.2 Stetigkeit

Definition 3.2.1. Es sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathcal{D}$. Dann heißt f stetig im Punkt x_0, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ für alle $x \in \mathcal{D}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt.

Bemerkung 3.2.1. Ist x_0 ein isolierter Punkt von $\mathcal{D}$, so ist jede auf $\mathcal{D}$ definierte Funktion f in x_0 stetig.

Satz 3.2.1. *Es sei $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathcal{D}$ ein HP von $\mathcal{D}$. Dann ist f im Punkt x_0 genau dann stetig, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist.*

Beweis. Das folgt aus Definition 3.1.2 für den Grenzwert und Definition 3.2.1 für die Stetigkeit. □

Bemerkung 3.2.2. Der Wert der Funktion im Punkt x_0, nämlich $f(x_0)$, spielt bei der Bestimmung des Grenzwerts $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ keine Rolle, wohl aber bei der Frage, ob f im Punkt x_0 stetig ist. Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ kann selbst dann existieren, wenn $f(x_0)$ gar nicht definiert ist. Aber f ist stetig in x_0, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und mit dem Wert der Funktion $f(x_0)$ übereinstimmt.

Beispiel 3.2.1. Wir betrachten drei Beispiele einander sehr ähnlicher Funktionen:

a) Es sei $f\colon \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$, $x \to 2x$ mit $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$.
Aus dem Folgenkriterium für Grenzwerte folgt $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Daher ist f stetig im Punkt 0, da $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ ist.

b) Nun sei $g\colon \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$, $x \to 2x$ mit $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Es ist $0 \notin \mathcal{D}_2$, aber 0 ist Häufungspunkt von $\mathcal{D}_2$. Da $f|_{\mathcal{D}_2} = g$, folgt $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. Aber man kann nicht von Stetigkeit von g in 0 reden, da 0 nicht zum Definitionsbereich von g gehört. Allerdings kann g durch die Definition $g(0) = 0$ stetig im Punkt 0 fortgesetzt werden. Damit wird der Definitionsbereich $\mathcal{D}_2$ zu $\mathcal{D}_1$ erweitert und g mit f identifiziert.

c) Schließlich sei $h\colon \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$, $x \to h(x)$ mit
$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$
Es ist $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0 \neq h(0)$. Also ist h nicht stetig in $x = 0$.

Aus dem Folgenkriterium für Grenzwerte lässt sich leicht das Folgenkriterium für Stetigkeit gewinnen:

Satz 3.2.2. *(Folgenkriterium für Stetigkeit)*
Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ und x_0 ein HP von $\mathcal{D}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Die Funktion f ist stetig in x_0.

(ii) Für jede Folge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $z_n \in \mathcal{D}\backslash\{x_0\}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = f(x_0)$.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus dem Folgenkriterium für Grenzwerte (Satz 3.1.1) und der Definition der Stetigkeit (Definition 3.2.1). □

Bemerkung 3.2.3. Satz 3.2.2 gibt ein Beispiel für die Vertauschbarkeit zweier Operationen:
Die eine Operation ist die Grenzwertoperation. Von einer Folge (a_n) wird der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} a_n$ gebildet. Die zweite Operation ist die Bildung des Funktionswertes $x \to f(x)$. Satz 3.2.2 sagt, dass bei stetigen Funktionen f diese Operationen vertauscht werden können. Es ist $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = f\left(\lim\limits_{n \to \infty} z_n\right)$.
Bei unstetigen Funktionen ist eine Vertauschung i.a. nicht möglich.
Für die Funktion aus Beispiel 3.2.1 c)
$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$
und die Folge (z_n) mit $z_n = \frac{1}{n}$ haben wir
$$\lim_{n \to \infty} h(z_n) = \lim_{n \to \infty} 2 \cdot \frac{1}{n} = 0 \neq 1 = h(0) = h\left(\lim_{n \to \infty} z_n\right).$$

Satz 3.2.3. *Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathcal{D}$. Die Funktionen $f, g \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ seien im Punkt x_0 stetig. Dann sind auch die Funktionen $f+g$ und $f \cdot g$ in x_0 stetig. Ist $g(x_0) \neq 0$, so gibt es eine Umgebung $U_\delta(x_0)$, so dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathcal{D} \cap U_\delta(x_0)$. Es sei $h = \frac{f}{g}|_{\{x\colon g(x)\neq 0\}\cap\mathcal{D}}$. Dann ist h im Punkt x_0 stetig.*

Beweis. Mann kann zunächst annehmen, dass x_0 ein HP von $\mathcal{D}$ ist, da Funktionen in isolierten Punkten ihres Definitionsbereichs immer stetig sind. Nach Voraussetzung ist $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. Nach Satz 3.1.3 (Grenzwertsätze) folgt $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = f(x_0)+g(x_0)$ und damit die Stetigkeit von $f+g$ in x_0.
Die anderen Teile der Behauptung folgen ebenfalls aus Satz 3.1.3. □

Wir kommen nun zur Komposition stetiger Funktionen:

Satz 3.2.4. *(Kettenregel für stetige Funktionen)*
Es seien $\mathcal{D}, \mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ und $f\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ sowie $g\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}$. Es sei f in $x_0 \in \mathcal{D}$ stetig und g stetig in $y_0 = f(x_0) \in \mathcal{E}$. Dann ist die Funktion $g \circ f \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $x \to (g\circ f)(x) = g(f(x))$ in x_0 stetig.

Beweis. Wir können annehmen, dass x_0 ein HP von f ist. Es sei (z_n) eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} z_n = x_0$. Nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit (Satz 3.2.2) ist $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(x_0) = y_0$. Wiederum nach dem Folgenkriterium, angewandt auf g, gilt für die Folge $(f(z_n))$ dann $\lim_{n\to\infty} g(f(z_n)) = g(y_0) = g(f(x_0))$. Also gilt für jede Folge (z_n) mit $\lim_{n\to\infty} z_n = x_0$ dann

$$\lim_{n\to\infty}(g\circ f)(z_n) = (g\circ f)\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) = (g\circ f)(x_0).$$

Nach dem Folgenkriterium ist $g \circ f$ in x_0 stetig. □

3.3 Einseitige und uneigentliche Grenzwerte, einseitige Stetigkeit

Definition 3.3.1. Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein HP von $\mathcal{D}$.

(i) So heißt $a \in \mathbb{R}$ rechtsseitiger Limes von f an der Stelle x_0 (Schreibweise: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = a$), falls x_0 HP von $\mathcal{D} \cap (x_0, \infty)$ ist, und wenn die Restiktion

$$g := f|_{\mathcal{D}\cap(x_0,\infty)} \colon \mathcal{D} \cap (x_0,\infty) \to \mathbb{R}$$

den Limes a besitzt, d.h. wenn $\lim_{x\to x_0} g(x) = a$ gilt.

(ii) Analog wird der linksseitige Limes von f an der Stelle x_0 definiert.
(Schreibweise: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a$).

(iii) Um Grenzwerte von einseitigen Grenzwerten zu unterscheiden, nennt man Grenzwerte im Sinne von Definition 3.1.2 auch beidseitige Grenzwerte.

Satz 3.3.1. *Es sei $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und x_0 ein HP sowohl von $\mathcal{D} \cap (x_0,\infty)$ als auch von $\mathcal{D} \cap (-\infty, x_0)$. Dann existiert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ genau dann, wenn der rechtsseitige und der linksseitige Limes von f an der Stelle x_0 existieren und übereinstimmen. In diesem Fall ist*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 3.3.2. (i) Eine Funktion $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in \mathcal{D}$ <u>rechtsseitig stetig</u>, wenn die Restiktion $g := f|_{\mathcal{D}\cap[x_0,\infty)}$ in x_0 stetig ist.

(ii) Analog wird <u>linksseitige Stetigkeit</u> definiert.

Satz 3.3.2. *Es sei $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathcal{D}$. Dann ist f in x_0 genau dann stetig, wenn es in x_0 rechts- und linksseitig stetig ist.*

Beweis. ohne Beweis. □

Es besteht nun noch die Möglichkeit, (ein- oder beidseitige) Grenzwerte für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ zu definieren, bzw. ∞ oder $-\infty$ als Grenzwert zuzulassen.

Definition 3.3.3. (i) Es sei $X \subset \mathbb{R}$. Dann heißt ∞ (bzw $-\infty$) uneigentlicher HP von X, wenn in jeder Umgebung $U_c(\infty) = (c,\infty)$ (bzw. $U_c(-\infty) = (-\infty, c)$) ein $x \in X$ liegt.

(ii) Es sei $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und ∞ ein HP von $\mathcal{D}$. Dann ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ für $a \in \mathbb{R}$, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $c = c(\epsilon)$ existiert, so dass $|f(x) - a| < \epsilon$ für alle x mit $x \in U_c(\infty)$ ist.

(iii) Analog wird $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ definiert.

Definition 3.3.4. (i) Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und x_0 ein HP von $\mathcal{D}$. Man sagt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, falls für alle $c > 0$ ein $\delta = \delta(c) > 0$ existiert, so dass $f(x) > c$, d.h. $f(x) \in U_c(\infty)$ für alle x mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt.

(ii) Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ und x_0 ein HP von $\mathcal{D}\cap(x_0,\infty)$. Man sagt $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$, falls für $g := f|_{\mathcal{D}\cap(x_0,\infty)}$ gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

(iii) Analog werden die Beziehungen

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

definiert.

Beispiel 3.3.1. Es sei $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = \frac{1}{x}$. Für alle $c > 0$ gilt dann $f(x) = \frac{1}{x} > c \Leftrightarrow 0 < x < c^{-1}$ und $f(x) = \frac{1}{x} < -c \Leftrightarrow -c^{-1} < x < 0$. Also ist

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

3.4 Polynome und rationale Funktionen

Definition 3.4.1. Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

(i) Eine Funktion $P\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $x \to P(x)$ mit $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ und $0 \le k \le n$ heißt <u>Polynom</u>. Die a_k heißen <u>Koeffizienten</u> des Polynoms. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der <u>Grad</u> des Polynoms, $n = gradP$.
Ist $a_k = 0$ für alle $0 \le k \le n$, so heißt P das <u>Nullpolynom</u> und man setzt $gradP := -\infty$.

(ii) Es seien $P, Q\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ Polynome. Es sei $E \subset \{x \in \mathcal{D}\colon Q(x) \neq 0\} \neq \emptyset$. Dann heißt

$$R\colon E \to \mathbb{R}, \quad x \to R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

<u>rationale Funktion</u>.

Satz 3.4.1. *Polynome und rationale Funktionen sind in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches stetige Funktionen.*

Beweis. (i) Zunächst zeigen wir die Aussage für Polynome:
Wir können annehmen, dass $x_0 \in \mathcal{D}$ ein HP von $\mathcal{D}$ ist. Konstante Funktionen c mit $c(x) = c$ für alle $x \in \mathcal{D}$ sind nach dem Folgenkriterium (Satz 3.2.2) in $x_0 \in \mathcal{D}$ stetig. Für jede Folge (z_n) mit $z_n \in \mathcal{D}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$ ist $c(z_n) = c$ für alle n und damit

$$\lim_{n\to\infty} c(z_n) = c = c(x_0).$$

Ebenso folgt die Stetigkeit der Identität: $id\colon x \to id(x) = x$.
Mit vollständiger Induktion folgt nach Satz 3.2.3, dass die Monome $M\colon x \to x^k$ stetig sind. Nach Satz 3.2.3 sind dann auch die konstanten Vielfachen $x \to c_k x^k$ stetig. Durch vollständige Induktion (nach der Anzahl der Summanden) folgt schließlich die Stetigkeit von $P(x)$.

(ii) Die Aussage für rationale Funktionen folgt aus Satz 3.2.3.

$\square$

Beispiel 3.4.1. Es sei f durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x \in (-\infty, 1] \\ 2x - 1 & \text{für} \quad x \in (1, \infty) \end{cases}$$

definiert. In welchen $x_0 \in \mathbb{R}$ ist f stetig?

Lösung:
Nach Satz 3.4.1 sind $f_{|(-\infty,1)}$ bzw. $f_{|(1,\infty)}$ in allen $x_0 \in (-\infty, 1)$ bzw. $x_0 \in (1, \infty)$ stetig. Also ist f in $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ stetig. In allen $x_0 \neq 1$ existieren also die beidseitigen Grenzwerte und stimmen mit dem Funktionswert $f(x_0)$ überein. Weiter ist

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} (2x - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Somit ist $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Also ist f auch im Punkt $x_0 = 1$ stetig.
Damit ist f in allen $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

Beispiel 3.4.2. Es sei g durch

$$g(x) = \begin{cases} 7x & \text{für} \quad x \in (-\infty, 2) \\ x^3 - 4 & \text{für} \quad x \in [2, \infty) \end{cases}$$

definiert. In welchen $x_0 \in \mathbb{R}$ ist g stetig?

Lösung:
Nach Satz 3.4.1 sind $g_{|(-\infty,2)}$ bzw. $g_{|(2,\infty)}$ in allen $x_0 \in (-\infty, 2)$ bzw. $x_0 \in (2, \infty)$ stetig, weswegen auch g in $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ stetig ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} g(x) &= \lim_{x\to 2^-} 7x = 14 \\ \lim_{x\to 2^+} g(x) &= \lim_{x\to 2^+} (x^3 - 4) = 8 - 4 = 4. \end{aligned}$$

Also existiert $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ nicht. Damit ist g in $x_0 = 2$ nicht stetig.

Wir kommen nun zur Frage, inwieweit die Koeffizienten und der Grad eines Polynoms eindeutig bestimmt sind.

Beispiel 3.4.3. Es sei $\mathcal{D} = \{0, 1\}$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 1. \end{cases}$$

So kann f auf unendlich viele Arten als Polynom geschrieben werden. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ stimmt das Polynom $P_n : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $x \to x^n$ mit f überein. Die Differenz $P_{m,n} := g_n - g_m : x \to x^n - x^m$ stellen stets das Nullpolynom auf $\mathcal{D}$ dar, 0 und 1 sind Nullstellen des Polynoms $P_{m,n}$.

Diese Vieldeutigkeit hat ihre Ursache darin, dass der Definitionsbereich $\mathcal{D}$ sehr klein ist. Wir wollen als erstes prüfen, wieviele Nullstellen ein Polynom haben kann.

Definition 3.4.2. Es sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Ein $x_0 \in \mathcal{D}$ mit $f(x_0) = 0$ heißt Nullstelle von f.
Ist $f(x) = c$ für alle $x \in \mathcal{D}$, so schreiben wir auch $f(x) \equiv c$ (auf $\mathcal{D}$).
Das Polynom $P : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ mit $P(x) \equiv 0$ (auf $\mathcal{D}$) heißt Nullpolynom (auf $\mathcal{D}$).

Satz 3.4.2. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $P : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $x \to P(x)$ ein Polynom mit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. Für $x_0 \in \mathcal{D}$ gibt es dann ein Polynom $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ mit $b_k \in \mathbb{R}$ und $b_{n-1} = a_n$, so dass*

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + P(x_0) \tag{$*$}$$

für alle $x \in \mathcal{D}$ gilt.
Ist insbesondere x_0 eine Nullstelle von P, so ist $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ für alle $x \in \mathcal{D}$.

Beweis. Wir führen vollständige Induktion nach n durch:
Induktionsanfang $n = 1$:
Dann haben wir das Polynom $P(x) = a_1 x + a_0$ mit $a_1 \neq 0$ gegeben.
Es ist $P(x) = a_1(x - x_0) + a_1 x_0 + a_0$. Es gilt also $(*)$ mit $Q(x) = a_1$.
Induktionsschritt $n \to n + 1$:
Es gelte die Induktionshypothese, und wir betrachten $P(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$. Weiter sei

$$R(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} x^k,$$

und es folgt

$$P(x) = (x - x_0)R(x) + x_0 R(x) + a_0. \tag{1}$$

Nach Induktionshypothese gibt es $c_i \in \mathbb{R}$, so dass mit $S(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$

$$R(x) = (x - x_0)S(x) + R(x_0) \tag{2}$$

gilt. Aus (1) und (2) folgt

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + P(x_0)$$

mit $Q(x) := R(x) + x_0 S(x)$ und somit die Behauptung. □

Satz 3.4.3. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.*

Beweis. Es seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ verschiedene Nullstellen von $P(x)$.
Wir zeigen zunächst durch vollständige Induktion nach k, dass $P(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_k) \cdot Q_{n-k}(x)$ mit einem Polynom Q_{n-k} vom Grad $n - k$ gilt.
Induktionsanfang $k = 1$:
Dies ist Satz 3.4.2.
Induktionsschritt $k \to k + 1$:
Nach Induktionshypothese gilt

$$P(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_k) \cdot Q_{n-k}(x) \tag{1}$$

mit einem Polynom Q_{n-k} vom Grad $n - k$. Nun gilt

$$\prod_{l=1}^{k} (x_{k+1} - x_l) \neq 0$$

und damit $Q_{n-k}(x_{k+1}) = 0$. Nach Satz 3.4.2 ist

$$Q_{n-k}(x) = (x - x_{k+1}) Q_{n-(k+1)}(x) \tag{2}$$

mit $grad Q_{n-(k+1)}(x) = n - (k + 1)$. Aus (1) und (2) folgt

$$P(x) = \prod_{l=1}^{k+1} (x - x_l) Q_{n-(k+1)}(x),$$

womit die Hilfsaussage gezeigt ist.
Für $k = n$ ergibt sich mit $a_n \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$

$$P(x) = a_n \prod_{l=1}^{n} (x - x_l).$$

Nach Satz 1.4.3 gilt $P(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist. □

Satz 3.4.4. *(Identitätssatz für Polynome)*
Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ und $P, Q \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ Polynome. Mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ für $0 \leq k \leq n$ seien

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \textit{und} \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

gegeben. Weiterhin gebe es $(n + 1)$ Elemente $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathcal{D}$ mit $P(x_j) = Q(x_j)$ für $1 \leq j \leq n + 1$. Dann ist $a_k = b_k$ für alle $0 \leq k \leq n$. Ist $P(x_j) = 0$ für $1 \leq j \leq n + 1$, so ist P das Nullpolynom. Insbesondere sind der Grad und die Koeffizienten eines Polynoms durch seine Werte auf einer unendlichen Menge eindeutig bestimmt. Ist $P(x) = 0$ für unendlich viele Werte von x, so ist P das Nullpolynom.

Beweis. Man wendet Satz 3.4.3 auf das Polynom $P - Q$ an. □

Satz 3.4.2 ist ein Spezialfall des Euklidischen Algorithmus:

Satz 3.4.5. *(Euklidischer Algorithmus)*
Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $|\mathcal{D}| = \infty$ und P und Q zwei nicht überall verschwindende Polynome auf $\mathcal{D}$. Dann gibt es zwei eindeutig bestimmte Polynome S, R mit $grad R < grad Q$, so dass $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ für alle $x \in \mathcal{D}$ ist.

Beweis. ohne Beweis. □

Beispiel 3.4.4. Es sei $P(x) = 3x^5 + x^3 + 1$ und $Q(x) = x^3 + 2$. Division ergibt

$$3x^5 + x^3 + 1 = (x^3 + 2) \cdot (3x^2 + 1) + (-6x^2 - 1).$$

Es gelten der Faktorisierungssatz und der Satz von der Partialbruchzerlegung.

Satz 3.4.6. *(Faktorisierungssatz)*
Es sei P ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit paarweise verschiedenen Nullstellen $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ und den Vielfachheiten $\nu_1, \ldots, \nu_k \in \mathbb{N}$. Ist $\nu_1 + \ldots + \nu_k < n$, so gibt es eindeutig bestimmte, paarweise verschiedene normierte Polynome $P_1(x) = x^2 + b_1 x + c_1, \ldots, P_l(x) = x^2 + b_l x + c_l$ vom Grad 2, welche keine reelle Nullstelle besitzen, d.h. es gilt $4c_j - b_j^2 > 0$ für $1 \leq j \leq l$, und es gibt eindeutig bestimmte Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_l \in \mathbb{N}$, so dass P die Produktdarstellung

$$P(x) = a_n \cdot (x - x_1)^{\nu_1} \ldots (x - x_k)^{\nu_k} \, (P_1(x))^{\mu_1} \ldots (P_l(x))^{\mu_l}$$

besitzt. Es gilt $\nu_1 + \ldots + \nu_k + 2(\mu_1 + \ldots + \mu_l) = n$.

Beweis. ohne Beweis. □

Satz 3.4.7. *(Partialbruchzerlegung)*
Es seien P, Q Polynome mit $\mathrm{grad} P < \mathrm{grad} Q$. Außerdem habe Q die (nach Satz 3.4.6 existierende) Produktdarstellung

$$Q(x) = a_n \cdot (x - x_1)^{\nu_1} \cdots (x - x_k)^{\nu_k} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{\mu_1} \cdots (x^2 + b_l x + c_l)^{\mu_l}.$$

Dann besitzt R eine Partialbruchdarstellung der Form

$$R(x) = a_n \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{A_i^{(1)}}{x - x_i} + \ldots + \frac{A_i^{(\nu_i)}}{(x - x_i)^{\nu_i}} \right) + \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{B_j^{(1)} x + C_j^{(1)}}{x^2 + b_j x + c_j} + \ldots + \frac{B_j^{(\mu_j)} x + C_j^{(\mu_j)}}{(x^2 + b_j x + c_j)^{\mu_j}} \right)$$

mit $A_i^{(1)}, \ldots, A_i^{(\nu_i)}$ für $i = 1, \ldots, k$ und $B_j^{(1)}, C_j^{(1)}, \ldots, B_j^{(\mu_j)}, C_j^{(\mu_j)}$ für $j = 1, \ldots, l$.

Wir schließen mit der Diskussion von Grenzwerten von Polynomen und rationalen Funktionen:

Satz 3.4.8. *(i) Es sei $P \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad n, $P(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ für $0 \leq k \leq n$ und $a_n = 1$. Dann ist*

$$\lim_{x \to \infty} P(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\infty, & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

(ii) Es sei $R(x) := \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ mit Polynomen P, Q mit $\mathrm{grad} P < \mathrm{grad} Q$.
Dann ist $\lim_{x \to \pm\infty} R(x) = 0$.

(iii) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist für gerades n

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{-n} = \infty$$

und für ungerades n

$$\lim_{x \to x_0^+} (x - x_0)^{-n} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0^-} (x - x_0)^{-n} = -\infty$$

(iv) Es seien R, S rationale Funktionen und $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Es sei $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = \pm\infty$ und $\lim\limits_{x \to x_0} S(x) = c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Es sei $T(x) := R(x) + S(x)$ und $U(x) := R(x) \cdot S(x)$. Dann ist

$$\lim_{x \to x_0} T(x) = \lim_{x \to x_0} R(x) \quad \textit{und} \quad \lim_{x \to x_0} U(x) = \begin{cases} \lim_{x \to x_0} R(x), & \textit{falls} \quad c > 0 \\ -\lim_{x \to x_0} R(x), & \textit{falls} \quad c < 0. \end{cases}$$

Dabei ist $-(-\infty) = \infty$ gesetzt.
Für einseitige Grenzwerte gelten entsprechende Ausagen.

Beweis. ohne Beweis. □

Die Behandlung von uneigentlichen (ein- oder beidseitigen) Grenzwerten rationaler Funktionen oder Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ kann zusammen mit dem Euklidischen Algorithmus, Faktorisierung und Partialbruchzerlegung auf Satz 3.4.8 zurückgeführt werden.

3.5 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

Definition 3.5.1. Es sei $f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$. Dann heißt f stetig auf $\mathcal{E}$, falls f in jedem Punkt $x \in \mathcal{E}$ stetig ist. Weiter heißt f nach oben beschränkt auf $\mathcal{E}$, falls es eine obere Schranke $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) \leq s$ für alle $x \in \mathcal{E}$ gilt. Entsprechend wird "nach unten beschränkt" definiert. Man nennt f dann beschränkt auf $\mathcal{E}$, falls es nach oben und nach unten beschränkt ist.

Satz 3.5.1. *(Stetigkeit auf kompakten Intervallen)*
Es sei $a \leq b \in \mathbb{R}$, $I = [a, b]$ und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig auf I. Dann gilt:

(i) Die Funktion f ist beschränkt auf I.

(ii) Die Funktion f nimmt auf I Minimum und Maximum an, d.h. es existieren $m, M \in \mathbb{R}$ und $x_{\min}, x_{\max} \in I$, so dass $f(x_{\min}) = m$, $f(x_{\max}) = M$ und $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Beweis. Es sei $M \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ das Supremum des Bildes $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$.
Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$ ist. Ist $M = \infty$, so ist der Limes uneigentlich. Nach dem Satz von Bolzano- Weiterstraß (Satz 2.1.14) hat die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mindestens einen Häufungswert z_0. Damit ist z_0 Häufungspunkt von I. Also enthält I alle seine Häufungspunkte, somit ist $z_0 \in I$. Nach Satz 2.1.17 gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ von (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = z_0$.
Nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit (Satz 3.2.2) ist $f(z_0) = M$, weswegen $M \in \mathbb{R}$, d.h. $M \neq \infty$ folgt. Hiermit ist die Beschränktheit nach oben und die Existenz des Maximums gezeigt. Benützt man diese Tatsachen für $-f$ anstelle von f, so folgt die Existenz des Minimums und die Beschränktheit nach unten. □

Definition 3.5.2. Es sei $f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$. Dann heißt f gleichmäßig stetig auf $\mathcal{E}$, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon)$ existiert, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ für alle $x, x_0 \in \mathcal{E}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt.

Bemerkung 3.5.1. Jede auf $\mathcal{E}$ gleichmäßig stetige Funktion ist dort auch stetig. Dies folgt aus Definition 3.2.1. Die Zahl $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ wird dann im allgemeinen jedoch nicht nur von ϵ, sondern auch von x_0 abhängen. Ist $\mathcal{E}$ kein kompaktes Intervall, so braucht eine auf $\mathcal{E}$ stetige Funktion nicht gleichmäßig stetig zu sein, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 3.5.1. Es sei $\mathcal{D} = \mathcal{E} = (0,1)$ und $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist f auf $\mathcal{E}$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.
Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Es ist

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|x||x_0|}$$

und damit

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon \Leftrightarrow |x - x_0| \geq \epsilon |x||x_0|.$$

Dies zeigt, dass für beliebige $\delta > 0$ die Aussage $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ höchstens dann gilt, wenn $|x - x_0| < \epsilon|x_0|$ ist. Also ist $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ für $|x - x_0| < \delta(\epsilon, x_0)$ mit $\delta(\epsilon, x_0) < \epsilon|x_0|$ erfüllt, also für kein $\delta > 0$, das nur von ϵ abhängt.

Auf kompakten Intervallen sind stetige Funktionen hingegen gleichmäßig stetig. Dieses Ergebnis ist eine Folgerung des Überdeckungssatzes von Heine- Borel.
Zunächst definieren wir den Begriff der Überdeckung:

Definition 3.5.3. Es seien $I, X \subset \mathbb{R}$. Für alle $x \in X$ sei $U(x) := U_{\epsilon(x)}(x)$ mit $\epsilon(x) > 0$ eine $\epsilon(x)$-Umgebung von x. Die Menge $\mathcal{U} = \{U_\epsilon(x)\colon x \in X\}$ heißt eine Überdeckung von I, wenn $I \subseteq \bigcup\limits_{x \in X} U(x)$.
Man nennt $\mathcal{V}$ eine Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$, falls $\mathcal{V} = \{U(x)\colon x \in Y\}$ mit $Y \subset X$ und $I \subseteq \bigcup\limits_{x \in Y} U(x)$ ist.
Ist dazu Y endlich, so heißt $\mathcal{V}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$.

Satz 3.5.2. *(Überdeckungssatz von Heine- Borel)*
Es sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung des kompakten Intervalls I. Dann besitzt $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung.

Beweis. Es sei $I = [a, b]$.
Annahme: Es gibt eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von I, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.
Es sei $\mathcal{U} := \{U(x)|\ x \in X\}$ mit $X \subset \mathbb{R}$. Wir definieren nun durch vollständige Induktion eine Folge (I_n) von Intervallen mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es bildet (I_n) eine Intervallschachtelung.

(ii) Es gilt: $|I_n| = |I| \cdot 2^{-(n+1)}$.

(iii) Die Überdeckung $\mathcal{U}$ von I besitzt keine endliche Teilüberdeckung.

Induktionsanfang: $n = 1$:
Dann ist $I_1 = I$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$:
Nach dem dritten Teil der Induktionshypothese besitzt die Überdeckung $\mathcal{U}$ von $I_n := [a_n, b_n]$ keine endliche Teilüberdeckung, und es ist $|I_n| = |I| \cdot 2^{-n}$. Dann ist $\mathcal{U}$ auch eine Überdeckung für die zwei Hälften $I_{n,1} := \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ und $I_{n,2} := \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$. Für mindestens eine der zwei Hälften $I_{n,j}$ mit $j \in \{1, 2\}$ existiert dann ebenfalls keine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$. Dann setzen wir $I_{n+1} := I_{n,j}$. Damit erfüllt die Folge (I_n) die Bedingungen (i), (ii) und (iii). Nach Satz 2.1.10 existiert ein $z_0 \in \mathbb{R}$, das allen Intervallen angehört. Da $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von I ist, gibt es $x \in X$ mit $z_0 \in U(x)$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $U_\epsilon(z_0) \subset U(x)$ ist. Weiter existiert ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $I_n \subset U_\epsilon(z_0)$. Diese I_n werden aber von der einzigen Umgebung $U_\epsilon(z_0)$ überdeckt, im Widerspruch dazu, dass für die keine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ existiert. $\square$

Satz 3.5.3. *Es sei I ein kompaktes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig auf I.*
Dann ist f auf I gleichmäßig stetig.

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$. Zu jedem $x_0 \in I$ gibt es ein $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$, so dass für alle $x \in U_{3\delta}$ gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1}$$

Wir setzen

$$U(x_0) = U_\delta(x_0). \tag{2}$$

Es bildet $\mathcal{U} = \{U(x_0)\colon x_0 \in I\}$ eine Überdeckung von I. Nach Satz 3.5.2 besitzt $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung. Es gilt also $x_1, x_2, \ldots, x_m \in I$, so dass es für alle $x \in I$ ein k mit $1 \le k \le m$ und $x \in U(x_k) = U_\delta(\epsilon, x_k)$ gibt. Wir setzen $\delta := \min\{\delta(\epsilon, x_1), \ldots, \delta(\epsilon, x_m)\}$. Es seien nun $x, x' \in I$ mit $|x - x'| < \delta$. Dann gibt es k, l mit $1 \le k, l \le m$ mit $x \in U(x_k)$ und $x' \in U(x_l)$. Es gilt nach der Dreiecksungleichung

$$|x_k - x_l| \le |x_k - x| + |x - x'| + |x' - x_l| < 3\delta.$$

Wegen (1) und (2) folgt $|f(x_k) - f(x_l)| < \frac{\epsilon}{3}$. Schließlich ist

$$|f(x) - f(x')| \le |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_l)| + |f(x_l) - f(x')| < \epsilon.$$

Also ist $|f(x) - f(x')| < \epsilon$ für alle $x, x' \in I$ mit $|x - x'| < \delta$, die gleichmäßige Stetigkeit. □

Satz 3.5.4. *(Zwischenwertsatz)*
Es sei $a < b \in \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, und $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei stetig auf I. Es sei $f(a) < c < f(b)$.
Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$, d.h. es gilt $[f(a), f(b)] \subset f(I)$.

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$X := \{z\colon a \le z \le b : f(x) \le c,\ \forall x \in [a, z]\}.$$

Es ist $X \neq \emptyset$, da $a \in X$. Wegen $X \subset [a, b]$ ist X beschränkt. Also existiert $s = \sup X$.

(i) Wir zeigen zunächst: $f(s) \le c$.
Es sei $x_n = s - \frac{s-a}{n}$. Wegen $a \le x_n \le s$ ist $f(x_n) \le c$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$ ist nach dem Folgenkriterium $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(s)$ und wegen $f(x_n) \le c$ ist $f(s) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \le c$.
Damit ist (i) gezeigt.

(ii) Annahme: $f(s) < c$.
Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $f(s) = c - 2\epsilon$ gilt. Wegen der Stetigkeit von f existiert ein $\delta = \delta(a)$, so dass für alle $x \in U_\delta(s) = (s-\delta, s+\delta)$ gilt: $|f(x) - f(s)| < \epsilon$ und somit $|f(x)| < c - \epsilon$.
Damit ist aber $[a, s+\delta) \cap [a, b] \subset X$ im Widerspruch zu $\sup X = s$. Also ist $f(s) \ge c$.

Zusammengefasst folgt $f(s) = c$. □

3.6 Monotone Funktionen, Umkehrfunktion

Definition 3.6.1. Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ und $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.
Dann heißt f monoton wachsend, wenn $f(x_1) \le f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ mit $x_1 \le x_2$ ist, und f heißt streng monoton wachsend, wenn $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ gilt.
Entsprechend wird monoton fallend bzw. streng monoton fallend definiert.

Satz 3.6.1. *Es sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $I = [a, b]$. Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < f(b)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die Funktion f besitzt eine auf $[f(a), f(b)]$ definierte Inverse f^{-1}, d.h. die Gleichung $f(x) = c$ besitzt für alle $c \in [f(a), f(b)]$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x = f^{-1}(c)$.

(ii) Die Funktion f ist injektiv.

(iii) Die Funktion f ist streng monoton wachsend.

Beweis. ohne Beweis. □

Satz 3.6.2. *Es sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $I = [a, b]$. Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion auf dem kompakten Intervall I.*
Dann ist die Inverse $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a, b]$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion auf $[f(a), f(b)]$.

Beweis. ohne Beweis. □

Satz 3.6.3. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die n- te Wurzelfunktion $g: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \to g(x) = \sqrt[n]{x}$ ist auf $[0, \infty)$ stetig.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.6.2, wenn wir anstatt f dann die streng monoton wachsende Funktion $f: [0, b] \to \mathbb{R}$, $x \to x^n$ wählen. Sie hat die Inverse $f^{-1}: [0, b^n] \to \mathbb{R}$, $x \to \sqrt[n]{x}$. Die Behauptung folgt mit $g := f^{-1}$, da b beliebig groß gewählt werden kann. □

3.7 Differenzierbarkeit

Definition 3.7.1. (i) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall. Dann heißt $f: I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Er heißt Ableitung oder Differenzenquotient von f an der Stelle x_0.
Schreibweise: $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{dy}{dx}$.

(ii) Ist f für jedes $x_0 \in I$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf I.
Die Funktion $f': I \to \mathbb{R}$, $x \to f'(x)$ heißt die Ableitung von f.

Satz 3.7.1. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 die Ableitung $f'(x_0)$.

(ii) Es existiert eine Funktion $r: I \to \mathbb{R}$, $x \to r(x)$, wobei r in x_0 stetig und $r(x_0) = 0$ ist, so dass

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \qquad (*)$$

gilt.

Beweis. (*i*) → (*ii*):
Wir setzen

$$\tilde{r}(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0).$$

Dann ist $(*)$ für $x \neq x_0$ erfüllt, und es ist

$$\lim_{x \to x_0} \tilde{r}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0.$$

Wir definieren

$$r(x) = \begin{cases} \tilde{r}(x) & \text{für} \quad x \neq x_0 \\ 0 & \text{für} \quad x = x_0. \end{cases}$$

(*ii*) → (*i*):
Es gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \big(f'(x_0) + r(x)\big) = f'(x_0).$$

□

Bemerkung 3.7.1. Satz 3.7.1 besagt, dass für kleine Werte von $|x - x_0|$ die Funktion f sehr gut durch die lineare Funktion (Polynom 1. Grades) $L_f \colon x \to L_f(x)$ approximiert wird. Dabei ist $L_f(x)$ die lineare Approximation von f. Wir werden später Approximationen durch Polynome höheren Grades, sogenannte Taylorpolynome kennenlernen. Der Graph von L_f ist eine Gerade , die Tangente an der Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Weiter ist $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente. Sie ist der Grenzwert der Differenzenquotienten

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

der Steigungen der Sekanten der Kurve $y = f(x)$ durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$.
Eine gröbere Approximation ist durch die konstante Funktion $C_f(x) = f(x_0)$ (Polynom nullten Grades) gegeben. Ihr Graph ist die horizontale Gerade durch $(x_0, f(x_0))$. Es ist $f(x) = C_f(x) + s(x)$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} s(x) = 0$. Diese existiert auch für stetige Funktionen.

Satz 3.7.2. *(Eindeutigkeit der linearen Approximation)*
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, $f \colon I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Gilt $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$ mit $c \in \mathbb{R}$, r stetig in x_0 und $r(x_0) = 0$, so ist f differenzierbar in x_0, und es ist $c = f'(x_0)$.

Beweis. Aus $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$ folgt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c + r(x).$$

Also ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c + \lim_{x \to x_0} r(x) \equiv c.$$

Nach Definition 3.7.1 ist $c = f'(x_0)$. □

Satz 3.7.3. *(Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit)*
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, $f \colon I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Ist f in x_0 differenzierbar, so ist es dort auch stetig.

Beweis. Aus $(*)$ aus Satz 3.7.1 folgt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x\to x_0} f'(x_0)(x-x_0) + \lim_{x\to x_0} r(x)(x-x_0) = f(x_0)$$

nach Satz 3.1.3. Nach Satz 3.2.1 folgt die Stetigkeit von f in x_0. □

Bemerkung 3.7.2. Die Umkehrung von Satz 3.7.3 gilt nicht. Die Betragsfunktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\to|x|$ ist in $x_0=0$ stetig, aber nicht differenzierbar. Es ist

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1, \quad \text{aber}\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1.\end{aligned}$$

Also existiert $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nicht.

3.8 Ableitungsregeln

Satz 3.8.1. *Es sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall. Die Funktionen $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ seien in $x_0\in\mathbb{R}$ differenzierbar. Es seien $a,b\in\mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $af+bg$ und $f\cdot g$ in x_0 differenzierbar, und es gilt*

(i) $(af+bg)'(x_0) = af'(x_0)+bg'(x_0)$ *(Linearität)*

(ii) $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$ *(Produktregel)*

Beweis. Wir beweisen nur (ii):
Für $x\in I$ mit $x\neq x_0$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}+\frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}g(x)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

□

Satz 3.8.2. *(Ableitung von Polynomen)*
Es sei $n\in\mathbb{N}$, und $P\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\to P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ mit $a_k\in\mathbb{R}$ sei ein Polynom.

Dann ist P für alle $x\in\mathbb{R}$ differenzierbar, und es ist $P'(x)=\sum_{k=1}^{n}ka_kx^{k-1}$.

Spezialfall: Es ist $\dfrac{d}{dx}x^n = n\cdot x^{n-1}$.

Beweis. Wir betrachten zunächst die Ableitung der Identität $id\colon x \to x$. Es ist

$$id'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{id(x) - id(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Der Spezialfall ergibt sich dann durch vollständige Induktion nach n.
Der allgemeine Fall folgt aus der Linearität. $\square$

Satz 3.8.3. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Außerdem sei $g(x) \neq 0$ für $x \in I$. Dann ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die Quotientenregel*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Beweis. Für $x, x_0 \in I$ und $x \neq x_0$ gilt

$$\frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) \frac{1}{g(x)g(x_0)}.$$

Der Grenzübergang $x \to x_0$ liefert die Behauptung. $\square$

Satz 3.8.4. *Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f\colon I \to J$ sei im Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar und $g\colon J \to \mathbb{R}$ sei im Punkt $y_0 = f(x_0) \in J$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 differenzierbar, und es gilt die Kettenregel*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. Nach Satz 3.7.1 ist für alle $x \in I$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \tag{1}$$

mit r stetig in x_0 sowie $r(x_0) = 0$ und

$$g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + s(y)(y - y_0). \tag{2}$$

für alle $y \in J$ mit s stetig in y_0 und $s(y_0) = 0$.
Indem wir in (2) dann $y = f(x)$ setzen, erhalten wir aus (1)

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(y_0)(f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)) + s(f(x))(f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)). \tag{3}$$

Es sei

$$t(x) := g'(y_0)r(x) + s(f(x))(f'(x_0) + r(x)).$$

Die Funktion f ist stetig in $x = x_0$ und wegen $s(f(x_0)) = s(y_0) = 0$ folgt $t(x_0) = 0$. Also folgt aus (3)

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) + g'(y_0)f'(x_0)(x - x_0) + t(x)(x - x_0)$$

mit t stetig in $x = x_0$ und $t(x_0) = 0$. Aus Satz 3.7.1 und 3.7.2 folgt $g \circ f$ ist differenzierbar in x_0, und es ist $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$. $\square$

Satz 3.8.5. *(Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)*
Es seien I, J Intervalle. Es sei $f\colon I \to J$ bijektiv und $x_0 \in I$. Es sei f im Punkt x_0 differenzierbar, und es sei $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die inverse Funktion $f^{-1}\colon J \to I$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, und es ist

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis. Es sei $(y_n)_{n=1}^\infty$ mit $y_n \in J\backslash\{y_0\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ sei durch

$$y_n = f(x_n) \Leftrightarrow x_n = f^{-1}(y_n)$$

definiert. Wegen der Stetigkeit von f^{-1} ist dann

$$\lim_{n\to\infty} x_n = f^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = f^{-1}(y_0) = x_0.$$

nach dem Folgenkriterium ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right)^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Wieder ist nach dem Folgenkriterium

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Beispiel 3.8.1. Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, $x \to x^2$ besitzt die Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon (0,\infty) \to (0,\infty), \quad y \to \sqrt{y}.$$

Nach Satz 3.8.5 ist für $y_0 \in (0,\infty)$ dann

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Also ist, wenn wir wieder x statt y schreiben:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3.9 Mittelwertsatz, Monotonie

Definition 3.9.1. Es sei I ein Intervall. Für das Innere von I schreiben wir $\overset{\circ}{I}$.
Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $\xi \in I$. Man sagt: f besitzt in ξ ein <u>relatives Maximum</u> (bzw. <u>relatives Minimum</u>), falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) \le f(\xi)$ (bzw. $f(x) \ge f(\xi)$) für alle $x \in U_\delta(\xi)$, (d.h. für alle $x \in I$ mit $|x - \xi| < \delta$), gibt. Die Funktion f besitzt in ξ ein <u>relatives Extremum</u>, falls es dort ein relatives Maximum oder Minimum besitzt.

Satz 3.9.1. *Es sei I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $\xi \in \overset{\circ}{I}$. Zudem sei f in ξ differenzierbar. Besitzt f in ξ ein relatives Extremum, so ist $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Wir können, falls wir nötigenfalls f durch $-f$ ersetzen, annehmen, dass f in ξ ein relatives Maximum besitzt. Es ist dann

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \le 0, \tag{1}$$

da $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \le 0$ für $x > \xi$ ist, und

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi^-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \ge 0, \tag{2}$$

da $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \ge 0$ für $x < \xi$ ist.
Aus (1) und (2) folgt $f'(\xi) = 0$. □

Satz 3.9.2. *(Satz von Rolle)*
Es sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $I = [a, b]$. Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei auf I stetig und auf $\overset{\circ}{I} = (a, b)$ differenzierbar. Es sei $f(a) = f(b) = 0$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Nach Satz 3.5.1 nimmt f auf I sein Maximum M und sein Minimum m an. Ist $f \equiv 0$, so ist $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a, b)$. Andernfalls ist $M > 0$ oder $m < 0$. Wir nehmen $f(\xi) = M > 0$ an. Wegen $f(a) = f(b) = 0$ ist $\xi \notin \{a, b\}$, also ist $\xi \in \overset{\circ}{I} = (a, b)$. Nach Satz 3.9.1 ist $f'(\xi) = 0$. □

Satz 3.9.3. *(1. Mittelwertsatz)*
Es sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $I = [a, b]$. Weiter sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf I stetig und auf $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Es sei

$$g(x) := f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dann ist $g(a) = g(b) = 0$. Nach dem Satz von Rolle (Satz 3.9.2) gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Bemerkung 3.9.1. Der Satz von Rolle und der 1. Mittelwertsatz lassen sich geometrisch so deuten, dass es mindestens einen Punkt ξ im Inneren des Intervalls $[a, b]$ gibt, so dass die Tangente an die Kurve $y = f(x)$ in $(\xi, f(\xi))$ parallel zur Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

Satz 3.9.4. *(2. Mittelwertsatz)*
Es sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $I = [a, b]$. Es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Es sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$, und es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis. Wegen des Satzes von Rolle (Satz 3.9.2) ist $g(b) \neq g(a)$. Die Funktion $h\colon I \to \mathbb{R}$ sei durch

$$h(x) := f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))\right)$$

definiert. Dann ist $h(a) = h(b) = 0$. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $h'(\xi) = 0$, d.h.

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi).$$

Wegen $g'(\xi) \neq 0$ folgt die Behauptung. □

Satz 3.9.5. *Es sei I ein beliebiges Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig in I und differenzierbar in $\overset{\circ}{I}$. Dann gilt*

$$f'(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \overset{\circ}{I} \Leftrightarrow \quad f \equiv const. \text{ auf } I.$$

Beweis. "$\Rightarrow$":
Es sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathring{I}$. es seien $x_1, x_2 \in I$ und $x_1 < x_2$. Nach dem Mittelwertsatz gilt dann

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$$

für ein $\xi \in (x_1, x_2)$. Deshalb ist $f(x) \equiv \text{const.}$
"$\Leftarrow$":
Klar. □

Satz 3.9.6. *(Monotonietest)*
Es sei I ein beliebiges Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ in I stetig und in $\mathring{I}$ differenzierbar. Dann gilt

(i) Es gilt

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathring{I} \Leftrightarrow f \text{ ist monoton wachsend.}$$

(ii) Es gilt

$$f'(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathring{I} \Rightarrow f \text{ ist streng monoton wachsend.}$$

Entsprechende Aussagen gelten für monoton fallenden Funktionen.

Beweis. (i) "$\Rightarrow$":
Es seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 3.9.3) gibt es $\xi \in (x_1, x_2)$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \underset{f'(\xi)\geq 0}{\Rightarrow} f(x_1) \leq f(x_2).$$

"$\Leftarrow$":
Es sei $x_0 \in \mathring{I}$. Es ist

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wegen $f(x) \geq f(x_0)$ für $x \geq x_0$ ist $f'(x_0) \geq 0$.

(ii) ohne Beweis.

□

Bemerkung 3.9.2. Die Rückrichtung in *(ii)* gilt nicht. Dies zeigt das Beispiel $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^3$. Obwohl f auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, ist $f'(0) = 0$.

Beispiel 3.9.1. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) := x^3 - 3x$. Man finde maximale Intervalle, auf denen f streng monoton wächst bzw. streng monoton fällt.
<u>Lösung:</u>
Es ist $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Es ist $f'(x) = 0$ für $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Somit ist $f'(x) > 0$ für $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Es ist $f'(x) < 0$ für $x \in (-1, 1)$. Nach Satz 3.9.6 ist f streng monoton wachsend auf $(-\infty, -1)$ und auf $(1, \infty)$ und streng monoton fallend auf $(-1, 1)$.

3.10 Höhere Ableitungen, Taylorpolynome

Definition 3.10.1. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$, dessen Ableitung f' auf I existiere.

(i) Ist f' auf I stetig, so heißt f stetig differenzierbar auf I (Schreibweise: $f \in C^1(I)$).

(ii) Die Ableitung $f'(x_0)$ existiere in $x_0 \in I$. Dann heißt

$$f''(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) := (f')'(x_0) = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right)(x_0)$$

die zweite Ableitung (oder Ableitung 2. Ordnung) von f an der Stelle x_0.

(iii) Falls $f''(x)$ für alle $x \in I$ existiert, dann heißt f zweimal differenzierbar auf I.

(iv) Ist zusätzlich f'' auf I stetig, dann heißt f zweimal stetig differenzierbar auf I (Schreibweise: $f \in C^2(I)$).

(v) Allgemein wird durch vollständige Induktion nach n die n- te Ableitung (oder Ableitung n- ter Ordnung) $f^{(n)}(x_0) = \dfrac{d^n f}{dx^n}(x_0)$ definiert und die Klasse $C^n(I)$ der n- mal stetig differenzierbaren Funktionen auf I.
Außerdem setzen wir $f^{(0)}(x_0) := f(x_0)$.

(vi) Existiert $f^{(n)}(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt f unendlich oft differenzierbar in x_0.

(vii) Ist $f^{(n)}(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in I$ erklärt, so heißt f unendlich oft differenzierbar in I (Schreibweise: $f \in C^\infty(I)$). In diesem Fall sind alle Ableitungen automatisch stetig, also ist f unendlich oft stetig differenzierbar.

Wir haben in Satz 3.7.1 gesehen, dass die erste Ableitung einer Funktion f für die lineare Approximation von f von Bedeutung ist. Es ist

$$f(x) = L_f(x) + r(x)(x - x_0)$$

mit $L_f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Es ist $L_f(x_0) = f(x_0)$ und $L'_f(x_0) = f'(x_0)$. So ist dann L_f das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad ≤ 1, das in x_0 dieselbe Ableitung bis zur 1. Ordnung besitzt wie f. Es ist nun zu erwarten, dass das Polynom höchstens n- ten Grades, das in x_0 dieselbe Ableitungen bis zur n- ten Ordnung besitzt wie f, eine besonders gute Approximation von f liefert.

Definition 3.10.2. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ dann n- mal differenzierbar. Dann heißt

$$T^{(n)} f(x_0, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

das n- te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt x_0.

Satz 3.10.1. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ genau n- mal differenzierbar und P ein Polynom vom Grad höchstens n. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ *mit* $0 \leq k \leq n$

(ii) $P(x) = T^{(n)} f(x_0, x)$.

Satz 3.10.2. *(Satz von Taylor)*
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Gegeben sei die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, welche $(n+1)$-mal stetig differenzierbar auf $\overset{\circ}{I}$ sei und n- mal stetig differenzierbar auf I. Dann gilt die Taylorsche Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = T^{(n)}f(x_0,x) + R_{n+1}(x_0,x)$$

für alle $x \in I$ und $x \neq x_0$. Dabei ist $\xi = x_0 + t(x-x_0)$ für ein $t \in (0,1)$ und

$$R_{n+1}(x_0,x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

das Restglied von Lagrange.

Beweis. ohne Beweis. □

3.11 de L'Hospitalsche Regeln

Die Bestimmung des Grenzwertes eines Quotientens $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ kann nach den Grenzwertsätzen (Satz 3.1.3) mittels

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

erfolgen, falls der Grenzwert des Nenners $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ist.
Gilt sowohl $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ als auch $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, so führen oft die de L'Hospitalschen Regeln zum Ziel. Diese können auch in Fällen angewandt werden, in denen $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ ist.

Satz 3.11.1. *Die Funktionen f und g seien auf dem offenen Intervall (a,b) mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ differenzierbar. Weiter sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$. Es sei*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \left(\text{der Fall } \frac{0}{0}\right)$$

oder

$$\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \qquad \left(\text{der Fall } \frac{\infty}{\infty} \text{ bzw. } \frac{c}{\infty}\right).$$

Außerdem existiere der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.
Dann ist $g(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$, der Limes $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ existiert, und es gilt die de L'Hospitalsche Regel

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $\frac{0}{0}$.

(i) Zunächst zeigen wir, dass

$$g(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in (a,b) \tag{1}$$

gilt. Wir führen diesen Beweis durch Widerspruch:
<u>Annahme:</u> $\exists x_0 \in (a,b)$ mit $g(x_0) = 0$.

(a) Fall 1: $a \in \mathbb{R}$ (d.h. $a \neq -\infty$):
Nach dem Satz von Rolle (Satz 3.9.2) gibt es dann ein ξ mit $g'(\xi) = 0$, ein Widerspruch.

(b) Fall 2: $a = -\infty$:
Es ist $g(x_0 - 1) \neq 0$. Andernfalls würde der Satz von Rolle wieder ein $\xi \in (x_0 - 1, x_0)$ mit $g'(\xi) = 0$ liefern, wiederum ein Widerspruch.
Es folgt die Existenz eines $x_2 < x_1 := x_0 - 1$ mit $|g(x_2)| < |g(x_1)|$. Es gibt also ein relatives Extremum im Intervall (x_2, x_0). Der Satz von Rolle liefert wieder ein $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$, erneut ein Widerspruch.

(ii) Es sei $l := \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
Falls $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, dann sei $l' > l$ fest vorgegeben. Dann gibt es ein $a' > a$ mit

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < l'$$

für alle x mit $a < x < a'$. Für $a < x < y < a'$ folgt aus dem zweiten Mittelwertsatz

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < l'$$

für ein $\xi \in (x, y)$. Für $x \to a$ folgt

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq l' \tag{2}$$

für $a < y < a'$.

(iii) Analog folgt für $l'' \leq l$: es existiert ein $a'' > a$ mit

$$\frac{f(y)}{g(y)} \geq l''$$

für alle y mit $a < y < a''$.

Aus *(ii)* und *(iii)* folgt die Behauptung. □

3.12 Konvexität und relative Extrema, Kurvendiskussion

Die Aufgabe der Kurvendiskussion ist es, die wesentlichen Eigenschaften des Graphen einer Funktion f zu ermitteln. Dazu gehört die Lage von absoluten und relativen Maxima und Minima. Wir haben mit Satz 3.9.1 zwar eine notwendige Bedingung für ein relatives Extremum in $x = \xi$ gefunden ($f'(\xi) = 0$), kennen aber noch keine hinreichende Bedingung. Eine solche kann durch Betrachtung der zweiten Ableitung f'' erhalten werden. Wir beginnen mit einem notwendigen Kriterium, das die zweite Ableitung benützt.

Satz 3.12.1. *(Notwendiges zweites Ableitungskriterium)*
Die Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei auf I zweimal stetig differenzierbar und besitze in einem Punkt $x_0 \in \mathring{I}$ ein relatives Maximum bzw. Minimum. Dann gilt

$$f''(x_0) \leq 0 \quad \textit{bzw.} \quad f''(x_0) \geq 0.$$

Beweis. O.B.d.A. besitze f ein relatives Maximum. Nach Satz 3.9.1 ist $f'(x_0) = 0$. Nach dem Satz von Taylor (Satz 3.10.2) haben wir

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2 \tag{1}$$

mit ξ zwischen x und x_0.
Annahme: $f''(x_0) > 0$.
Wegen der Stetigkeit von f'' in x_0 gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f''(\xi) > 0$ für alle $\xi \in U_\delta(x_0)$ ist. Aus (1) folgt dann $f(x) > f(x_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$, ein Widerspruch.
Also folgt $f''(x_0) \leq 0$.
Ebenso führt die Annahme $f''(x_0) < 0$ zu einem Widerspruch dazu, dass f in x_0 ein relatives Minimum besitzt. □

Satz 3.12.2. *(Hinreichendes zweites Ableitungskriterium)*
Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf I zweimal stetig differenzierbar. In einem inneren Punkt $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ sei $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ bzw. $f''(x_0) > 0$. Dann besitzt f an der Stelle x_0 ein isoliertes relatives Maximum bzw. Minimum.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $f''(x_0) < 0$. Der Fall $f''(x_0) > 0$ verläuft analog. Wie im Beweis von Satz 3.12.1 haben wir

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2 \tag{1}$$

mit ξ zwischen x und x_0. Wegen der Stetigkeit von f'' gibt es ein $\delta = \delta(\epsilon)$, so dass $f''(\xi) \leq \frac{f''(x_0)}{2}$ für alle $\xi \in U_\delta(x_0)$ gilt. Daraus und aus (1) folgt $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$.
Damit besitzt f ein isoliertes Maximum in $x = x_0$. □

Definition 3.12.1. Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf I einmal differenzierbar. Dann besitzt f in $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ einen Wendepunkt $(x_0, f(x_0))$, wenn die Ableitung f' in x_0 ein isoliertes relatives Extremum besitzt.

Definition 3.12.2. Es sei I ein (endliches oder unendliches) Intervall, das aus mehr als einem Punkt besteht. Dann heißt f konvex auf I, wenn die Ungleichung

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{1}$$

für alle $x_1, x_2 \in I$ und alle $t \in (0,1)$ gilt.
Zudem heißt f streng konvex, wenn die strikte Ungleichung

$$f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{2}$$

für alle $x_1 \neq x_2$ und alle $t \in (0,1)$ gilt.
Gelten (1) bzw. (2) mit dem $\geq$- bzw. $>$- Zeichen, so heißt f konkav bzw. streng konkav.

Bemerkung 3.12.1. Die Ungleichungen (1) bzw. (2) haben folgende geometrische Bedeutung:
Durchläuft t das Intervall $(0,1)$, so durchläuft der Punkt $((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)f(x_1) + tf(x_2))$ die Verbindungsstrecke der Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$, d.h. die Sekante, während $((1-t)x_1 + tx_2, f((1-t)x_1 + tx_2))$ die Punkte des Graphen $(x, f(x))$ mit den gleichen Abszissen durchläuft. Die Ungleichungen (1) bzw. (2) besagen also, dass das Segment des Graphen von $y = f(x)$ zwischen zweien seiner Punkte nicht unter bzw. über der Sekante ist.

Satz 3.12.3. *Es sei I ein beliebiges Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei auf I stetig und auf $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar. Dann gilt:*

(i) Die Funktion f ist auf I genau dann konvex, wenn die Ableitung f' auf $\overset{\circ}{I}$ monoton wächst.

(ii) Weiter ist f auf I genau dann streng konvex, wenn die Ableitung f' auf $\overset{\circ}{I}$ streng monoton wächst.

Beweis. ohne Beweis. □

Satz 3.12.4. *(Konvexität, zweites Ableitungskriterium)*
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, und $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei auf I stetig und auf $\overset{\circ}{I}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

(i) Die Funktion f ist auf I genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$ gilt.

(ii) Ist $f''(x) > 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$, so ist f streng konvex.

Beweis. ohne Beweis. □

Kapitel 4

Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Grenzfunktionen, Potenzreihen

4.1 Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit

Die Typen der uns bisher bekannten Funktionen sind sehr begrenzt. Sie umfassen lediglich Ausdrücke, die durch Kombination der vier Grundrechenarten mit der Wurzelbildung erhalten werden. Wichtige andere "elementare" Funktionen werden als Grenzwerte von Funktionenfolgen erhalten, z.B. die Exponentialfunktion $E(x)$ (oder e^x) durch

$$E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Somit ist $E(x)$ der Grenzwert der Folge der Funktionen $(T_n(x))_{n=0}^{\infty}$ mit $T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Jede Funktion $T_n(x)$ dieser Folge ist als Polynom stetig und differenzierbar. Gilt dies auch für die Grenzfunktion $E(x)$? Wir werden im folgenden die Grundlagen zur Behandlung dieser Fragen bereitstellen.

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen nicht stetig zu sein braucht.

Beispiel 4.1.1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \to f_n(x) = x^n.$$

Es ist

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad x = 1. \end{cases}$$

Die Grenzfunktion $f(x)$ ist also unstetig in $x = 1$, obwohl alle Funktionen f_n der Folge stetig sind.

Die Stetigkeit der Grenzfunktion folgt jedoch, wenn man die Forderung der Konvergenz durch die stärkere Forderung der <u>gleichmäßigen Konvergenz</u> ersetzt.

Definition 4.1.1. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n \colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Außerdem sei $f \colon D \to \mathbb{R}$. Man sagt $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ <u>konvergiert gleichmäßig</u> gegen f (auf D), Schreibweise: $f_n \xrightarrow{glm.} f$, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\epsilon), \text{ so dass } \forall n \ge n_0 : |f(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Bemerkung 4.1.1. Der Unterschied zur punktweisen Konvergenz besteht darin, dass für gegebenes $\epsilon > 0$ ein n_0 existieren muss, das von x unabhängig ist. In Beispiel 4.1.1 lässt sich zu jedem Paar (ϵ, x) mit $\epsilon > 0$ und $x_0 \in [0,1]$ ein $n_0 = n_0(\epsilon, x_0)$ finden, so dass $|f(x_0) - f_n(x_0)| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ ist. Es lässt sich jedoch kein solches n_0 finden, das für alle x_0 funktioniert.

Satz 4.1.1. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, und $f_n \colon D \to \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$ sei auf D stetig. Die Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiere gleichmäßig gegen $f \colon D \to \mathbb{R}$. Dann ist auch f auf D stetig.*

Beweis. Es sei $x_0 \in D$. Ist x_0 isolierter Punkt von D, so ist f nach Bemerkung 3.2.1 in x_0 stetig. Wir können also annehmen, dass x_0 Häufungspunkt von D ist. Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es nach der Definition der gleichmäßigen Konvergenz ein $n_0 = n_0(\epsilon/3) \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/3 \quad \text{für alle } n \geq n_0(\epsilon/3) \tag{1}$$

ist. Wegen der Stetigkeit von f_n gibt es nach Definition 3.2.1 ein $\delta = \delta(\epsilon/3) > 0$, so dass

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon/3 \quad \text{für alle } x \in U_\delta(x_0) \tag{2}$$

ist. Aus (1) und (2) folgt nun für alle $x \in U_\delta(x_0)$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\underset{\Delta - Ugl.}{\leq} |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Dies zeigt nach Definition 3.2.1 die Stetigkeit von f in x_0. □

Satz 4.1.2. *(Cauchykriterium für gleichmäßige Konvergenz)*
Eine Folge von Funktionen $f_n \colon D \to \mathbb{R}$ ist genau dann gleichmäßig konvergent, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\epsilon), \text{ so dass für } n_1, n_2 \geq n_0 \text{ gilt } |f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \epsilon.$$

Beweis. Nach dem Cauchykriterium (Satz 2.1.15) konvergiert die Folge $(f_n(x))$ für alle $x \in D$. Es gibt also eine Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es $n_0 = n_0(\epsilon/2)$, so dass für $n_1, n_2 \geq n_0$ gilt:

$$|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \epsilon/2.$$

Satz 2.1.8 (Erhaltung von Ungleichungen) ergibt mit dem Grenzübergang $n_2 \to \infty$ schließlich

$$|f_{n_1}(x) - f(x)| \leq \epsilon/2 < \epsilon.$$

□

4.2 Differenzierbarkeit der Grenzfunktion

Satz 4.2.1. *Es sei $I = [a,b]$ mit $a < b \in \mathbb{R}$. Die Funktionen $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$ seien differenzierbar mit den Ableitungen $f_n' \colon I \to \mathbb{R}$. Für $x_0 \in I$ konvergiere (f_n) und (f_n') konvergiere gleichmäßig auf I. Dann konvergiert (f_n) auf I gleichmäßig gegen eine auf I differenzierbare Funktion f, und es gilt*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

für alle $x \in I$.

Beweis. i) Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Nach dem Cauchykriterium (Satz 2.1.15) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_k(x_0) - f_l(x_0)| < \epsilon/2 \quad \text{für alle } k, l \geq n_0. \tag{1}$$

Weiter folgt wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_n'(x))$ auf I die Existenz von $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass für $k, l \geq n_1$

$$|f_k'(\xi) - f_l'(\xi)| < \frac{\epsilon}{2|I|} \quad \text{für alle } \xi \in I \tag{2}$$

gilt. Es sei $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ mit $k, l \geq n_2$ und $x \in I$. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 3.9.3) gibt es ein ξ zwischen x_0 und x, so dass

$$(f_k(x) - f_l(x)) - (f_k(x_0) - f_l(x_0)) = (f_k'(\xi) - f_l'(\xi))(x - x_0). \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt

$$|f_k(x) - f_l(x)| < \epsilon \quad \text{für alle } k, l \geq n_2.$$

Damit erfüllt die Folge (f_n) das Cauchykriterium für gleichmäßige Konvergenz und konvergiert nach Satz 4.1.2 gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \tag{4}$$

für alle $x \in I$. Nach Satz 4.1.1 ist f stetig.

ii) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, & \text{falls} \quad x \neq x_0 \\ f_n'(x_0), & \text{falls} \quad x = x_0. \end{cases}$$

Nach der Definition der Ableitung (Definition 3.7.1) ist g_n auf I stetig. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 3.9.3) folgt für alle $x \neq x_0$:

$$g_k(x) - g_l(x) = f_k'(\xi) - f_l'(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in (x_0, x).$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n') auf I erfüllt auch die Folge (g_n) das Cauchykriterium der gleichmäßigen Konvergenz und konvergiert nach Satz 4.1.2 gegen eine Grenzfunktion g. Nach Satz 4.1.1 ist g stetig und damit

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0).$$

Nach Definition 3.7.1 ist damit f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$. Da nach (4) die Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ für alle $x \in I$ erfüllt ist, ist f für alle $x \in I$ differenzierbar, und es gilt $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

□

4.3 Stetigkeit und Differenzierbarkeit durch unendliche Reihen definierter Funktionen

Wie schon in Abschnitt 4.1 ausgeführt wurde, sind unendliche Reihen von Funktionen Spezialfälle von Grenzfunktionen von Funktionenfolgen. Betrachtet man die Sätze 4.1.1 und 4.1.2 für diesen Spezialfall, so erhält man sofort

Satz 4.3.1. *i) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktionen $g_n\colon D \to \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$ seien auf D stetig. Die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ konvergiere auf D gleichmäßig gegen $f(x)$. Dann ist auch f auf D stetig.*

ii) Es sei $I = [a, b]$ mit $a < b \in \mathbb{R}$. Die Funktionen $h_n\colon I \to \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$ seien differenzierbar mit den Ableitungen $h_n'\colon I \to \mathbb{R}$. Für $x_0 \in I$ konvergiere $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x_0)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} h_n'(x_0)$ konvergiere gleichmäßig auf I. Dann konvergiert $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ auf I gleichmäßig. Weiter ist $h(x)$ auf I differenzierbar, und es gilt $h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n'(x)$ für alle $x \in I$.

Wir geben noch ein Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz von unendlichen Reihen:

Satz 4.3.2. *(Weierstraßsches Majorantenkriterium)*
Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$ Funktionen. Es gebe Zahlen $M_n \in \mathbb{R}$, so dass $|f_n(x)| \leq M_n$ für alle $x \in D$ und $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$.
Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf D gleichmäßig.

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$. Nach dem Cauchykriterium (Satz 2.1.15) existiert ein n_0, so dass $\sum_{k=m}^{n} M_k < \epsilon$ für alle m, n mit $n_0 \leq m \leq n$. Dann ist auch $\left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\right| < \epsilon$. Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe folgt aus Satz 4.1.2. $\square$

4.4 Potenzreihen

Definition 4.4.1. Es sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen und $x, x_0 \in \mathbb{R}$. Die unendliche Reihe

$$p(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

heißt Potenzreihe (in x) mit Entwicklungspunkt x_0 und Koeffizienten a_n.

Bemerkung 4.4.1. Zur Bezeichnung der Folge (a_n) können auch andere Symbole verwendet werden, ebenso an Stelle von x, z. B. ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (w - w_0)^n$ eine Potenzreihe in w mit Entwicklungspunkt w_0 und Koeffizienten b_n.

Die grundlegende Frage betrifft den Konvergenzbereich der Potenzreihe, die Menge aller x, für die $p(x)$ konvergiert.

Beispiel 4.4.1. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert nach Satz 2.3.1 für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| \geq 1$. Der Konvergenzbereich ist also das Intervall $(-1, 1)$.

Wir werden sofort sehen, dass der Konvergenzbereich einer Potenzreihe stets ein Intervall ist.
Zur Vorbereitung zeigen wir

Satz 4.4.1. *Es sei* $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine Potenzreihe, und* $p(x)$ *konvergiere für* $x = x_1$*. Es sei* $0 < \epsilon < |x_1 - x_0|$.
Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *gleichmäßig auf der Menge* $\{x|\ |x-x_0| \le |x_1-x_0| - \epsilon\}$.

Beweis. Nach Satz 2.4.1 folgt aus der Konvergenz für $x = x_1$

$$|a_n||x_1 - x_0|^n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Insbesondere ist $|a_n||x_1 - x_0|^n \le M$ für ein (von n unabhängiges) M. Es ist

$$|a_n||x-x_0|^n \le |a_n|(|x_1-x_0| - \epsilon)^n = |a_n||x_1-x_0|^n \left(1 - \frac{\epsilon}{|x_1-x_0|}\right)^n \le Mq^n$$

mit $q = 1 - \dfrac{\epsilon}{|x_1-x_0|} < 1$.
Die Behauptung folgt nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium (Satz 4.3.2). $\square$

Satz 4.4.2. *Es sei* $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine Potenzreihe. Dann tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein:*

i) Die Potenzreihe $p(x)$ *konvergiert nur für* $x = x_0$.

ii) Es gibt eine Zahl $r > 0$*, so dass* $p(x)$ *für* $|x-x_0| < r$ *konvergiert und für* $|x-x_0| > r$ *divergiert.*

iii) Die Potenzreihe $p(x)$ *konvergiert für alle* x.

Beweis. Die drei Fälle schließen sich offenbar gegenseitig aus. Wir nehmen an, dass die Fälle (i) und (iii) nicht eintreten. Zu zeigen ist, dass dann der Fall (ii) eintritt. Es sei

$$\mathcal{K} = \{x' \colon p(x) \text{ konvergiert für } x \in (x_0 - |x'-x_0|, x_0 + |x'-x_0|)\} \tag{1}$$

und

$$r = \inf\{|x'-x_0| \colon x' \in \mathcal{K}^C\}. \tag{2}$$

Da Fall (i) nicht eintritt, existiert ein $x_1 \ne x_0$, so dass $p(x_1)$ konvergiert. Nach Satz 4.4.1 ist dann $(x_0 - |x_1-x_0|, x_0 + |x_1-x_0|) \subseteq \mathcal{K}$ und damit $r > 0$.
Da Fall (iii) nicht eintritt ist $\mathcal{K}^C \ne \infty$ und damit $r < \infty$.

i) Es sei $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.
Nach den Definitionen (1) und (2) existiert ein $x' \in (x_0 - r, x_0 + r)$ so dass $p(x')$ konvergiert.
Nach Satz 4.4.1 konvergiert auch $p(x)$.

ii) Es sei $x \notin [x_0 - r, x_0 + r]$.
Nach den Definitionen (1) und (2) gibt es ein x'' mit $|x_0 - x''| < |x_0 - x|$, so dass $p(x'')$ divergiert.
Annahme: $p(x)$ ist konvergent.
Dann ist nach Satz 4.4.1 auch $p(x'')$ konvergent, ein Widerspruch.

$\square$

Definition 4.4.2. Trifft auf eine Potenzreihe der Fall (ii) aus Satz 4.4.2 zu, so nennen wir den Wert r den Konverenzradius der Potenzreihe.
Im Fall (i) sagen wir: p hat den Konvergenzradius $r = 0$ und im Fall (iii): p hat den Konvergenzradius $r = \infty$.

Satz 4.4.3. *(Formel für den Konvergenzradius)*
Es gilt

$$r = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}.$$

Hierbei ist $0^{-1} := \infty$ *und* $\infty^{-1} := 0$ *zu setzen.*

Beweis. Es sei $l := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
Nach dem Wurzelkriterium (Satz 2.4.7) ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konvergent, wenn

$$l \cdot |x - x_0| < 1, \quad \text{also für } |x - x_0| < l^{-1},$$

und divergent für

$$l \cdot |x - x_0| > 1, \quad \text{also für } |x - x_0| > l^{-1}.$$

Die Behauptung folgt nach Definition 4.4.2. $\square$

Bei der Behandlung einiger wichtiger Beispiele hiflt

Satz 4.4.4. *Es ist*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Beweis. Nach Satz 2.4.11 ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} \ge \liminf_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty.$$

$\square$

Beispiel 4.4.2. Es sei

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n.$$

Nach Satz 4.4.4 ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = 2 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-1}} = 2.$$

Nach Satz 4.4.3 hat $p(x)$ den Konvergenzradius $r = 1/2$.

Bemerkung 4.4.2. Satz 4.4.2 (ii) macht keine Aussage über die Konvergenz der Potenzreihe in den Endpunkten des Intervalls $(x_0 - r, x_0 + r)$. Es können alle vier Fälle auftreten: Konvergenz in keinem der beiden Endpunkte, nur in dem rechten, nur in dem linken oder in beiden Endpunkten.

Beispiel 4.4.3. Es sei

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Nach Satz 4.4.4 ist $r = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = 1$. Weiter ergibt Satz 4.4.2 Konvergenz in $(-1, 1)$ und Divergenz außerhalb von $[-1, 1]$.

Für den Endpunkt $x_1 = 1$ erhalten wir $p(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, die harmonische Reihe, also Divergenz nach Satz 2.4.9. Für den Endpunkt $x_2 = -1$ erhalten wir $p(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, also Konvergenz nach dem Leibnizkriterium (Satz 2.4.3).

Satz 4.4.5. *(Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Potenzreihen)*
Es sei $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist $p(x)$ stetig und in $(x_0 - r, x_0 + r)$ unendlich oft differenzierbar, falls $r < \infty$ bzw. auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, falls $r = \infty$ ist. Die Ableitungen können durch gliedweise Differentiation erhalten werden, d.h.

$$p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}.$$

Die Potenzreihen für alle Ableitungen $p^{(k)}(x)$ mit $k \in \mathbb{N}$ haben denselben Konvergenzradius wie $p(x)$.

Beweis. Wir behandeln nur den Fall $r < \infty$. Den Fall $r = \infty$ erhält man durch kleine Änderungen. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{ist} \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = r^{-1}.$$

Damit haben $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ und $p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^n$ denselben Konvergenzradius r. Nach Satz 4.4.1 konvergieren sie beide gleichmäßig in $[x_0 - r + \epsilon, x_0 + r - \epsilon]$ für jedes $\epsilon > 0$. Nach Satz 4.3.1 ist $p(x)$ in $(x_0 - r, x_0 + r)$ stetig und differenzierbar, und es ist $p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$. □

Satz 4.4.6. *(Identitätssatz für Potenzreihen)*
Es sei $x \in \mathbb{R}$. Es seien $p_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ bzw. $p_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ Potenzreihen mit Entwicklungspunkt x_0 und Konvergenzradius $r_1 > 0$ bzw. $r_2 > 0$. Es existiere ein $r_3 > 0$, so dass $p_1(x) = p_2(x)$ für alle $x \in (x_0 - r_3, x_0 + r_3)$ ist. Dann ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Wegen $p_1(x) = p_2(x)$ für alle $x \in (x_0 - r_3, x_0 + r_3)$ gilt auch $p_1^{(k)}(x) = p_2^{(k)}(x)$ für alle $x \in (x_0 - r_3, x_0 + r_3)$ und für alle $k \in \mathbb{N}$, insbesondere auch $p_1^{(k)}(x_0) = p_2^{(k)}(x_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Durch k- fache gliedweise Differentiation nach Satz 4.4.5 erhalten wir

$$p_1^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_n \quad \text{und} \quad p_2^{(k)}(x_0) = k! \cdot b_n.$$

Also ist $a_n = b_n$. □

4.5 Taylorreihen

Wir erinnern an den Satz von Taylor (Satz 3.10.2):
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Gegeben sei die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, welche $(n+1)$-mal stetig differenzierbar auf $\overset{\circ}{I}$ sei und n- mal stetig differenzierbar auf I. Dann gilt die Taylorsche Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = T^{(n)}f(x_0, x) + R_{n+1}(x_0, x) \tag{1}$$

für alle $x \in I$ und $x \neq x_0$. Dabei ist $\xi = x_0 + t(x - x_0)$ für ein $t \in (0, 1)$ und

$$R_{n+1}(x_0, x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

das Restglied von Lagrange.
Ist f auf I unendlich oft differenzierbar, so kann (1) für jeden Wert von n berechnet werden.
Die Folge der Taylorpolynome $(T^{(n)}f(x_0, x))$ bildet dann eine Potenzreihe, die Taylorreihe

$$T^{(n)}f(x_0, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Definition 4.5.1. Es sei f auf I unendlich oft differenzierbar und $x_0 \in I$. Unter der Taylorreihe $Tf(x_0, x)$ von f mit Entwicklungspunkt x_0 versteht man

$$Tf(x_0, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Es stellt sich die Frage: Für welche x gilt $Tf(x_0, x) = f(x)$?

Satz 4.5.1. *Es gilt genau dann*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

wenn $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x_0, x) = 0$ *ist.*

Beweis. Dies folgt sofort aus der Taylorschen Formel (1). □

Bemerkung 4.5.1. Eine Potenzreihe $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ mit positivem Konvergenzradius ist ihre eigene Taylorreihe. Denn k- fache gliedweise Differenzierung ergibt, wie im Beweis von Satz 4.4.6

$$a_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Kapitel 5

Die elementaren transzendenten Funktionen

5.1 Die Exponentialfunktion

Satz 5.1.1. *Die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *ist für alle* $x \in \mathbb{R}$ *konvergent.*

Beweis. Nach Satz 4.4.4 ist $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} = 0$.
Nach Satz 4.4.3 hat die Potenzreihe den Konvergenzradius ∞. □

Definition 5.1.1. Die nach Satz 5.1.1 für alle $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

heißt Exponentialfunktion. Andere Schreibweisen sind e^x oder $\exp(x)$.

Satz 5.1.2. *Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:*

i) (Differenzierbarkeit)
Die Funktion $E(x)$ *ist unendlich oft differenzierbar, und es gilt* $E^{(n)}(x) = E(x)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und für alle* $x \in \mathbb{R}$*, insbesondere also* $E'(x) = E(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*.*

ii) (Funktionalgleichung)
Es gilt

$$\begin{aligned} E(x_1 + x_2) &= E(x_1) \cdot E(x_2) \quad \textit{für alle } x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \\ E(-x) &= E(x)^{-1} \quad \textit{und } E(0) = 1, \\ E(x) &> 0 \quad \textit{für alle } x. \end{aligned}$$

iii) (Monotonie, Konvexität)
$E(x)$ *ist streng monoton wachsend und streng konvex.*

iv) (Asymptotik)
Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} E(x) = \infty \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to-\infty} E(x) = 0$$

v) (Wachstum)
Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{E(x)} = 0 \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

vi) (Wertebereich)
E hat den Wertebereich $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

Beweis. i) Nach Satz 4.4.5 ist die Potenzreihe $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ differenzierbar, und die Ableitung $E'(x)$ kann durch "gliedweise Differentiation" erhalten werden:

$$E'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(n \cdot x^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = E(x)$$

mit einer Indexverschiebung.
Durch vollständige Induktion nach n folgt $E^{(n)}(x) = E(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) Es seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$E(x_1) \cdot E(x_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_1^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_2^n}{n!}.$$

Nach Satz 2.5.2 (Cauchyprodukt) ist

$$\begin{aligned} E(x_1) \cdot E(x_2) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} \frac{x_1^m}{m!} \cdot \frac{x_2^{l-m}}{(l-m)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{m=0}^{l} \frac{l!}{m!(l-m)!} x_1^m x_2^{l-m} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{m=0}^{l} \binom{l}{m} x_1^m x_2^{l-m} \underset{\substack{S.\ 2.1.6 \\ Binom.Lehrsatz}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (x_1 + x_2)^l = E(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Es ist weiter

$$E(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{0!} = 0^0 + \frac{0^1}{1!} + \ldots = 0^0 = 1.$$

Mit $x_1 = x$ und $x_2 = -x$ folgt $E(x) \cdot E(-x) = E(x + (-x)) = E(0) = 1$ bzw $E(-x) = E(x)^{-1}$.
Für $x \geq 0$ ist

$$E(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1,$$

und für $x < 0$ ist $E(x) = E(-x)^{-1} > 0$.

iii) Es ist $E'(x) = E(x) > 0$ und $E''(x) = E(x) > 0$.

iv) und v) Für $x > 0$ ist

$$E(x) = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

für alle n.

Damit ist

$$\frac{x^n}{E(x)} \leq \frac{x^n}{x^{n+1}/(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{x}, \quad \text{also } \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{E(x)} = 0.$$

Es folgt $E(x) \geq x^n$ für alle $x \geq x_0(n)$ und damit

$$\lim_{x\to\infty} E(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} E(x) = \lim_{x\to-\infty} E(-x)^{-1} = 0.$$

vi) Zu jedem $y > 0$ gibt es nach iv) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $E(x_1) < y < E(x_2)$. Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 3.5.4) existiert ein x zwischen x_1 und x_2 mit $E(x) = y$.

□

Definition 5.1.2. (Hyperbelfunktionen)
Die Funktionen sinh und cosh (Sprechweise: Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus) sind durch

$$\begin{aligned} \sinh x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= \frac{E(x) - E(-x)}{2} \\ \cosh x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{E(x) + E(-x)}{2} \end{aligned}$$

definiert.

Satz 5.1.3. *Es ist*

i) $\cosh(-x) = \cosh x$ *und* $\sinh(-x) = -\sinh x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

ii) $\sinh' x = \cosh x$ *und* $\cosh' x = \sinh x$.

iii) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

iv) $\lim_{x\to\infty} \cosh x = \lim_{x\to-\infty} \cosh x = \infty$ *und*
$\lim_{x\to\infty} \sinh x = \infty$ *bzw.* $\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$.

Beweis. Durch Nachrechnen. □

5.2 Der Logarithmus

Satz 5.2.1. *Die Exponentialfunktion* $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *besitzt eine Inverse* $E^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Beweis. Dies folgt aus den Eigenschaften (iii) und (vi) der Exponentialfunktion (nach Satz 5.1.2) und Satz 3.6.2. □

Definition 5.2.1. Die Funktion E^{-1} von Satz 5.2.1 wird mit "log" bezeichnet und heißt der (natürliche) Logarithmus von x.
Sie hat die folgenden Eigenschaften:

i) $E(\log x) = x$ und $\log(E(x)) = x$ für alle $x > 0$
$\log 1 = 0$

ii) log ist differenzierbar, und es ist $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$

iii) log ist streng monoton und streng konkav

iv) Es ist $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$ und $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$

Beweis. ohne Beweis. □

Satz 5.2.2. *Für $|x| < 1$ gilt die Taylorentwicklung:*

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}. \tag{$*$}$$

Beweis. Wir berechnen zuerst das n- te Taylorpolynom für $f(x) := \log(1+x)$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Die Folge der Ableitungen $f^{(n)}$ ergibt sich wie folgt:

$$f'(x) = (1+x)^{-1}.$$

Durch vollständige Induktion nach k zeigt man:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k}.$$

Also ist

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k = 0 \\ (-1)^{k+1}(k-1)! & \text{für} \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Damit haben wir nach Definition 3.10.2

$$T^{(n)} f(0,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

Nach Satz 4.5.1 gilt genau dann

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

wenn

$$R_{n+1}(0,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{(1+\xi_{n+1})^{-(n+1)}}{n+1} x^{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Dabei liegen die ξ_{n+1} zwischen 0 und x.
Es sei zunächst $-1/2 < x < 1$. Dann folgt $|1 + \xi_{n+1}| \geq |x|$ und

$$|R_{n+1}(0,x)| = \left| \frac{x}{1+\xi_{n+1}} \right|^{n+1} \longrightarrow 0$$

für $n \to \infty$. Damit folgt $(*)$ für $-1/2 < x < 1$.
Nach Satz 4.4.3 und 4.4.4 hat die Potenzreihe in $(*)$ den Konvergenzradius $r = 1$.
Man kann nun auf anderem Wege zeigen, dass $(*)$ für den weiteren Bereich $|x| < 1$ gilt.
Es sei

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Es ist

$$\frac{d}{dx} \log(1+x) = \frac{1}{1+x}$$

und nach Satz 4.4.5

$$\frac{d}{dx} p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}.$$

Also ist

$$\frac{d}{dx} \left(\log(1+x) - p(x) \right) = 0$$

und nach Satz 3.9.5 ist dann $\log(1+x) - p(x)$ auf I konstant. Für $-1/2 < x < 1$ ist $\log(1+x) - p(x) = 0$, also ist die Konstante gerade 0. $\square$

5.3 Allgemeine Exponentialfunktionen, Logarithmus- und Potenzfunktionen

In Definition 2.4.3 hatten wir für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen a^n rekursiv definiert. Für festes a ist dann die Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to a^n$ eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$, d.h. eine Zahlenfolge. Es stellt sich die Frage, wie dieser Definitionsbereich erweitert werden kann, wenn alle Potenzgesetze nach wie vor gelten sollen. Eine erste Erweiterung zu einer Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ erhält man durch die Definition $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ für $n > 0$ und $a \neq 0$ und $a^0 = 1$ für $a \in \mathbb{R}$. Für $a > 0$ und rationale Exponenten $x = \frac{r}{s}$ lässt sich $a^{r/s}$ durch $a^{r/s} := \sqrt[s]{a^r}$ definieren. Ein Weg, den Definitionsbereich für $a > 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ zu erweitern, also a^x für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ zu definieren, ist, eine Folge $x_n = \frac{r_n}{s_n}$ rationaler Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ zu wählen und a^x durch

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{r_n/s_n}$$

zu definieren.
Es ist dann zu zeigen, dass dieser Grenzwert existiert und nur von x und nicht von der gewählten Folge (r_n/s_n) abhängt.
Die Definition der Exponentialfunktion $x \to a^x$ kann tatsächlich auf diese Weise durchgeführt.
Wir werden jedoch einen einfacheren Weg wählen, der auf der bereits definierten Exponentialfunktion $x \to E(x)$ von Abschnitt 5.1 beruht.

Definition 5.3.1. (Allgemeine Exponential-, Logarithmus- und Potenzfunktion)

i) Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ist $a^x := \exp(x \log a)$.

ii) $e := E(1)$

iii) Für $b > 0$, $b \neq 1$ und $x > 0$ ist $\log_b x := \frac{\log x}{\log b}$.

iv) Für $x > 0$ und $s \in \mathbb{R}$ ist $x^s := \exp(s \log x)$.

Satz 5.3.1. *Für alle $a, b > 0$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die Potenzgesetze:*

i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

ii) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

iii) $(a^x)^y = a^{xy}$

Beweis. ohne Beweis. □

Satz 5.3.2. *Es sei $s \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Potenzfunktion $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \to x^s$ ist unendlich oft differenzierbar, für $s > 0$ streng monoton wachsend, $\lim_{x\to\infty} x^s = \infty$, für $s < 0$ streng monoton fallend, $\lim_{x\to 0^+} x^s = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} x^s = 0$, für $x > 1$ und $x < 0$ streng konvex und für $0 < x < 1$ streng konkav. Außerdem gilt*

$$\frac{d}{dx} x^s = s \cdot x^{s-1}.$$

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 5.3.2. (allgemeiner Binomialkoeffizient)
Für $s \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\binom{s}{k} := \frac{s \cdot (s-1) \cdots (s-k+1)}{k!} \quad \text{und} \quad \binom{s}{0} = 1.$$

Satz 5.3.3. *(Binomialreihe)*
Für $s \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$ gilt

$$(1+x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k.$$

Beweis. ohne Beweis. $\square$

5.4 Die trigonometrischen Funktionen

Satz 5.4.1. *Die Potenzreihen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

konvergieren für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 4.4.3 und Satz 4.4.4. $\square$

Definition 5.4.1. Die nach Satz 5.4.1 für alle $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion

$$x \to \sin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$$

(Sprechweise: sinus x) heißt Sinusfunktion.
Die nach Satz 5.4.1 für alle $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion

$$x \to \cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

(Sprechweise: cosinus x) heißt Cosinusfunktion.

Satz 5.4.2. *Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ sind unendlich oft differenzierbar, und es gilt*

$$\sin' x = \cos x \quad \text{und} \quad \cos' x = -\sin x.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 4.4.5 mittels gliedweiser Differentiation. $\square$

Lemma 5.4.1. *Es ist*

i) $\cos x > 0$ *für* $x \in (0, \sqrt{2})$

ii) $\cos 2 < 0$

Beweis. i) Es ist

$$\cos x = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{x^{4l}}{(4l)!} - \frac{x^{4l+2}}{(4l+2)!} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{4l}}{(4l)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4l+1)\cdot(4l+2)} \right)$$

Für $0 < x < \sqrt{2}$ ist $1 - \frac{x^2}{(4l+1)\cdot(4l+2)} > 0$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$.

ii) Es gilt

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - \ldots \leq 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = 1 - 2 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0.$$

□

Definition 5.4.2. Die Zahl π (sprich: pi) ist durch

$$\frac{\pi}{2} := \inf\{x_0 > 0\colon\ \cos x_0 = 0\}$$

definiert.

Satz 5.4.3. *Es gilt* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es sei $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$. Nach Satz 5.4.2 und Satz 3.8.4 (Kettenregel) erhalten wir

$$f'(x) = 2\sin x \cos x - 2\sin x \cos x = 0.$$

Nach Satz 3.9.5 folgt, dass f konstant ist. Einsetzen von $x = 0$ ergibt $f(x) = 1$. □

Satz 5.4.4. *Es gilt*

i) $2\sqrt{2} < \pi < 4$

ii) $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ *und* $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

iii) Auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *ist* $\sin x$ *streng monoton wachsend und* $\cos x$ *streng monoton fallend.*

Beweis. i) Nach Definition 3.9.2 und Lemma 5.4.1 folgt $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2} < 2$.

ii) und (iii) Nach Definition 5.4.2 folgt wegen der Stetigkeit von $\cos x$, dass $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist. Es ist $\cos x > 0$ für $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Nach Satz 3.9.6 (Monotonietest) folgt, dass $\sin x$ auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsend ist. Wegen $\sin 0 = 0$ folgt $\sin x > 0$ für $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Aus $(\cos x)' = -\sin x$ und Satz 3.9.6 folgt, dass $\cos x$ auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton fallend ist. Aus $\cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$ und $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ folgt dann $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

□

Satz 5.4.5. *(Additionstheoreme)*
Für $x', x \in \mathbb{R}$ *gilt:*

i) $\sin(x' + x) = \cos x' \sin x + \sin x' \cos x$

ii) $\cos(x' + x) = \cos x' \cos x - \sin x' \sin x$

Beweis. i) Für festes $x' \in \mathbb{R}$ setzen wir: $f(x) = \sin(x' + x)$ und bestimmen die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$. Die Folge der Ableitungen $f^{(k)}(0)$ ergibt sich als

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin x' \\ f'(0) &= \cos x' \\ f''(0) &= -\sin x' \\ f^{(3)}(0) &= -\cos x' \end{aligned}$$

und allgemein für alle $m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} f^{(4m)}(0) &= \sin x' \\ f^{(4m+1)}(0) &= \cos x' \\ f^{(4m+2)}(0) &= -\sin x' \\ f^{(4m+3)}(0) &= -\cos x' \end{aligned}$$

Die Taylorreihe ergibt sich als

$$\begin{aligned} Tf(0,x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \cos x' \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots \right) + \sin x' \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots \right) \\ &= \cos x' \sin x + \sin x' \cos x. \end{aligned}$$

Für das Restglied gilt

$$R_{n+1}(0,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

mit ξ zwischen 0 und x.
Es ist $f^{(n+1)}(\xi) = \pm \sin(x' + \xi)$ oder $f^{(n+1)}(\xi) = \pm \cos(x' + \xi)$, also $\left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \leq 1$. Damit gilt $R_{n+1}(0,x) \to 0$ für $n \to \infty$. Es folgt

$$\sin(x + x') = f(x) = Tf(0,x) = \cos x' \sin x + \sin x' \cos x.$$

ii) folgt aus (i) durch Differentiation beider Seiten nach x.

□

Satz 5.4.6. *(Periodizität)*

i) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ *und* $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

ii) $\sin(x + \pi) = -\sin x$ *und* $\cos(x + \pi) = -\cos x$

iii) $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ *und* $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. i) Dies folgt aus Satz 5.4.5 mit $x' = \frac{\pi}{2}$.

ii) Dies folgt durch zweimalige Anwendung von (i).

iii) Durch zweimalige Anwendung von (ii) folgt zunächst

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{und} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Durch vollständige Induktion nach k folgt die Behauptung für alle $k \in \mathbb{N}$. Ersetzt man x durch $x - 2k\pi$, ergibt sich die Behauptung für alle $k \in \mathbb{Z}$.

□

Satz 5.4.7. *i) Die Funktion* $\sin x$ *ist in* $(0, \pi)$ *positiv und streng konkav; in* $(\pi, 2\pi)$ *negativ und streng konvex, jeweils zwischen den Nullstellen 0 und* π *bzw.* π *und* 2π*, welche auch Wendepunkte sind.*

ii) Die Funktion $\sin x$ *ist im Intervall* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *vom Minimum* $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ *bis zum Maximum* $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ *streng monoton wachsend und im Intervall* $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ *vom Maximum* $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ *bis zum Minimum* $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ *streng monoton fallend.*

iii) Die Funktion $\sin x$ *hat die Periode* 2π*. Die Nullstellen sind durch*

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

gegeben.

Beweis. Dies folgt aus den Sätzen 5.4.4 und 5.4.6. □

Satz 5.4.8. *i) Die Funktion* $\cos x$ *ist im Intervall* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *positiv und streng konkav und in* $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ *negativ und streng konvex, jeweils zwischen den Nullstellen* $-\frac{\pi}{2}$ *und* $\frac{\pi}{2}$ *bzw.* $\frac{\pi}{2}$ *und* $\frac{3\pi}{2}$*, welche auch Wendepunkte sind.*

ii) Die Funktion $\cos x$ *ist im Intervall* $(0, \pi)$ *streng monoton fallend vom Maximum* $\cos 0 = 1$ *bis zum Minimum* $\cos \pi = -1$ *und in* $(\pi, 2\pi)$ *streng monoton wachsend vom Minimum* $\cos \pi = -1$ *bis zum Maximum* $\cos 2\pi = 1$*.*

iii) Die Funktion $\cos x$ *hat die Periode* 2π*. Die Nullstellen sind durch*

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

gegeben.

Definition 5.4.3. (Tangens, Cotangens)

i) Die Funktion $\tan\colon x \to \tan x$ (Sprechweise: <u>Tangens</u> x) ist durch

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{für} \quad x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

definiert.

ii) Die Funktion $\cot\colon x \to \cot x$ (Sprechweise: <u>Cotangens</u> x) ist durch

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{für} \quad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

definiert.

Satz 5.4.9. *Die Funktionen* $\tan x$ *und* $\cot x$ *sind in ihren Definitionsbereichen unendlich oft differenzierbar, und es gilt*

$$\begin{aligned}
\tan' x &= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \textit{für} \quad x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \textit{und} \\
\cot' x &= -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \textit{für} \quad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt aus der Quotientenregel und den Differentiationsregeln für $\sin x$ und $\cos x$ (Satz 5.4.2). □

Satz 5.4.10. *(Additionstheoreme)*
Es gilt

i) $\tan(x + x') = \dfrac{\tan x + \tan x'}{1 - \tan x \cdot \tan x'}$ *für* $x, x', x + x' \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

ii) $\cot(x + x') = \dfrac{\cot x \cdot \cot x' - 1}{\cot x + \cot x'}$ *für* $x, x', x + x' \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Beweis. Wir beweisen nur (i):
Aus Satz 5.4.5 folgt:

$$\tan(x + x') = \frac{\sin(x + x')}{\cos(x + x')} = \frac{\sin x \cos x' + \cos x \sin x'}{\cos x \cos x' - \sin x \sin x'} = \frac{\tan x + \tan x'}{1 - \tan x \tan x'}.$$

□

Satz 5.4.11. *(Periodizität)*
Für $x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ *und* $x \neq k\pi$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$ *gilt:*

$$\begin{aligned}
\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\cot x, & \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\tan x \\
\tan(x + \pi) &= \tan x, & \cot(x + \pi) &= \cot x.
\end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt aus den entsprechenden Gleichungen für $\sin x$ und $\cos x$ (Satz 5.4.6). □

Satz 5.4.12. *i) Die Funktion* $\tan x$ *ist in* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *streng monoton wachsend von* $-\infty$ *bis* ∞, *in* $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ *streng konkav und in* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ *streng konvex mit* $\tan 0 = 0$, *d.h. 0 ist Nullstelle und Wendepunkt.*

ii) Die Funktion $\cot x$ *ist in* $(0, \pi)$ *streng monoton fallend von* $-\infty$ *bis* ∞, *in* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ *streng konvex und in* $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ *streng konkav mit* $\cot \frac{\pi}{2} = 0$, *d.h.* $\frac{\pi}{2}$ *ist Nullstelle und Wendepunkt.*

Beweis. Dies folgt aus den Sätzen 5.4.7 bis 5.4.9. □

5.5 Die Arcusfunktionen

Satz 5.5.1. *i) Die Funktion* $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$*,* $x \to \sin x$ *besitzt eine Inverse:*

$$\sin^{-1}\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

ii) Die Funktion $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$*,* $x \to \cos x$ *besitzt eine Inverse:*

$$\cos^{-1}\colon [-1,1] \to [0,\pi].$$

iii) Die Funktion $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$*,* $x \to \tan x$ *besitzt eine Inverse:*

$$\tan^{-1}\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

iv) Die Funktion $\cot\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$*,* $x \to \cot x$ *besitzt eine Inverse:*

$$\cot^{-1}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi).$$

Beweis. Dies folgt aus der strengen Monotonie der Funktionen in den angegebenen Intervallen (Sätze 5.4.7, 5.4.8, 5.4.12). □

Definition 5.5.1. (Arcusfunktionen)

i) Die Inverse des Sinus auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ist der arcsin (Sprechweise: Arcussinus), d.h. für alle $x \in [-1,1]$ und $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ gilt

$$\arcsin x = y \Leftrightarrow x = \sin y.$$

ii) Die Inverse des Cosinus auf dem Intervall $[0,\pi]$ ist der arccos (Sprechweise: Arcuscosinus), d.h. für alle $x \in [-1,1]$ und $y \in [0,\pi]$ gilt

$$\arccos x = y \Leftrightarrow x = \cos y.$$

iii) Die Inverse des Tangens auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ist der arctan (Sprechweise: Arcustangens), d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt

$$\arctan x = y \Leftrightarrow x = \tan y.$$

iv) Die Inverse des Cotangens auf $(0,\pi)$ ist der arccot (Sprechweise: Arcuscotangens), d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (0,\pi)$ gilt

$$\operatorname{arccot} x = y \Leftrightarrow x = \cot y.$$

Satz 5.5.2. *Die Arcusfunktionen sind in ihren Definitionsbereichen unendlich oft differenzierbar, und es gilt*

i) $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *für* $x \in (-1,1)$

ii) $\arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *für* $x \in (-1,1)$

iii) $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$ *für* $x \in \mathbb{R}$

iv) $\operatorname{arccot}' x = -\dfrac{1}{1+x^2}$ *für* $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir beweisen nur (i). Der Beweis der anderen Teile verläuft ähnlich.

i) Nach Satz 3.8.5 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion) ist die Arcussinusfunktion als Umkehrfunktion der Sinusfunktion im Intervall $(-1, 1)$ differenzierbar, und es gilt

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

□

Satz 5.5.3. *(Taylorreihe)*

i) Für $|x| < 1$ *ist*

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

ii) Für $|x| < 1$ *ist*

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Beweis. Wir gehen analog zur Herleitung der Taylorentwicklung für $\log(1 + x)$ vor (Satz 5.2.2): Für die Ableitungen $\arcsin' x$ und $\arctan' x$ sind die Taylorreihen $p_1(x)$ und $p_2(x)$ leicht zu finden. Für die ursprüngliche Funktionen ergeben sich die Taylorreihen durch "Integration" (mehr darüber im nächsten Kapitel). Man findet Potenzreihen, deren Ableitungen $p_1(x)$ bzw. $p_2(x)$ sind. Wir beschreiben die Details:

i) Es ist

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2}.$$

Nach Satz 5.3.3 (Binomialreihe) ist

$$(1 - u)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} u^k \quad \text{für } |u| < 1.$$

Die Substitution $u = x^2$ ergibt

$$\arcsin' x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} \quad \text{für } |x| < 1.$$

Es sei

$$p_1(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Man sieht leicht, dass $p_1(x)$ den Konvergenzradius 1 hat. Nach Satz 4.4.5 kann $p_1(x)$ gliedweise differenziert werden:

$$p_1'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} \quad \text{für } |x| < 1,$$

also

$$\frac{d}{dx} (\arcsin x - p_1(x)) = 0.$$

Nach Satz 3.9.5 ist $\arcsin x - p_1(x) = \mathit{const}.$ auf $(-1, 1)$. Einsetzen von $x = 0$ ergibt schließlich $p_1(x) = \arcsin x$.

ii) Es ist

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Nach Satz 2.4.6 ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$ (geometrische Reihe). Die Substitution $q = -x^2$ ergibt

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad \text{für } |x| < 1.$$

Es sei

$$p_2(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Nach Satz 4.4.3 und Satz 4.4.4 hat $p_2(x)$ den Konvergenzradius 1. Nach Satz 4.4.5 kann $p_2(x)$ gliedweise differenziert werden:

$$p_2'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad \text{für } |x| < 1,$$

also

$$\frac{d}{dx} (\arctan x - p_2(x)) = 0.$$

Nach Satz 3.9.5 ist $\arctan x - p_2(x) = const.$ auf $(-1, 1)$. Einsetzen von $x = 0$ ergibt wiederum $p_2(x) = \arctan x$.

$\square$