Prof. Dr. U. Stadtmüller
Dr. M. Harder

Winter 2016/2017
15.07.2016
Blatt 01

Übungen zu Analysis II

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Donnerstag, den 20.10.2016 vor den Übungen)

1. Berechne folgende Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\log 10}} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\sin^2(x)+b^2\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ mit $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_0^{1} x^2\arctan(x)\,\mathrm{d}x$

   (f) $\displaystyle\int_0^{a} \frac{2x^2+5x-5}{(x+1)^2(x-1)}\,\mathrm{d}x$ mit $a\in(0,1)$

   (g) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

   (h) $\displaystyle\int^{x} \big(\cos(2\varphi)\big)^2\,\mathrm{d}\varphi.$

   (i) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{5-x^2}\,\mathrm{d}x.$

   Hinweis: Eventuell ist bei rationalen Funktionen in sin und cos die Substitutionen $u=\tan\big(\frac{x}{2}\big)$ hilfreich.
   (2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

2. Es sei $F\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ mit $F(x):=x^2\sin\big(\frac{1}{x^2}\big)$ und $F(0)=0$. Zeige dass F auf $[-1,1]$ differenzierbar ist. Zeige außerdem, dass F' über $[0,1]$ nicht Riemann-integrierbar ist.

   (2 Punkte)

3. Es seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$. Weiter sei $f\colon[a,b]\to\mathbb{C}$ und $f_1,f_2\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ Funktionen, so dass $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ für alle $x\in[a,b]$ gilt. Wir nennen f *Riemann-integrierbar*, falls $f_1,f_2\in R[a,b]$ und schreiben dann $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x:=\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x+i\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$. Berechne $\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}x$ in Abhängigkeit von $t\in\mathbb{R}$.
   (3 Punkte)

4. Zeige, dass die Funktion $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=\frac{1}{x}-\big[\frac{1}{x}\big]$ für $x\neq 0$ und $f(0):=0$ über $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist. Gemäß einer Bemerkung der Vorlesung genügt es zu zeigen, dass zu jedem $\varepsilon>0$ endlich viele Intervalle $I_1,\dots,I_n$ existieren, mit $\sum_{k=1}^n|I_k|<\varepsilon$, so dass f stetig auf $[0,1]\setminus\bigcup_{k=1}^n I_k$ ist. Der Wert des Integrals ist $1-\gamma$, wobei γ die sogenannte Euler-Mascheroni-Konstante ist ($\gamma\approx 0{,}57721$). Zeige außerdem, dass $\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}=\log n+\gamma+o(1)$ für $n\to\infty$ gilt.

   (3 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

https://www.uni-ulm.de/?id=83444