Prof. Dr. U. Stadtmüller
Dr. M. Harder

Winter 2016/2017
20.10.2016
Blatt 02

Übungen zu Analysis II

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Donnerstag, den 27.10.2016 vor den Übungen)

1. Es sei $0 < \alpha < 1$. Betrachte die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$.
   (a) Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.
   (b) Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \left|f(x)\right|\mathrm{d}x$ nicht existiert.
   (c) Zeige oder widerlege, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ existiert.

   (2 + 2 + 2 Punkte)

2. Es sei $\Gamma\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit $\Gamma(x) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ die Gamma-Funktion. Die Abbildung $B\colon (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ wird (Eulersche) Betafunktion genannt.
   (a) Zeige, dass $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ für alle $x > 0$ gilt.
   (b) Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \log(t)\,\mathrm{d}t$ existiert.
   (c) Zeige, dass $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt (*Hinweis*: Zeige zunächst $B(x,y) = B(y,x)$ und $B(x, y+1) = \frac{y}{x} B(x+1, y)$).
   (d*) Zeige, dass $B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin v)^{2x-1} (\cos v)^{2y-1}\,\mathrm{d}v = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,\mathrm{d}t$ gilt.

   (2 + 3 + 3 + 3 Punkte)

3. Löse die folgenden Aufgaben und begründe jeweils, ob arithmetisches, geometrisches oder harmonisches Mittel zum Einsatz kommen. Es sei $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Die k-te Person in einer Gruppe von n Studierenden benötigt x_k Stunden für die Lösung einer Übungsaufgabe. Bestimme die Zeit, die die Gruppe für die Lösung von n verschiedenen Übungsaufgaben benötigt, wenn alle zusammen arbeiten. Wir gehen dabei davon aus, dass jede Übungsaufgabe exakt gleich schwer ist und in beliebig kleine Teilaufgaben zerteilt werden kann. Es können also alle zugleich an verschiedenen Stellen der selben Aufgabe arbeiten.
   (b) Die Dauer für die Lösung aller n Aufgaben aus Teilaufgabe (a) sei d. Wenn jede Person eine Aufgabe alleine löst, werden manche mehr Zeit benötigen und manche weniger. Entscheide, ob die Gruppe im Mittel von der Zusammenarbeit bei der Lösung aller Aufgaben profitiert. Bestimme also die mittlere Abweichung der persönlichen Arbeitszeit einer Person von d (eine Zeitersparnis äußert sich dabei in einem negativen Wert).

   (2 + 2 Punkte)

4. (a) Bestimme alle $a, b \in \mathbb{R}$ für die das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{x^a}{1+x^b}\,\mathrm{d}x$ konvergiert.
   (b) Bestimme alle $\mu > 0$ für die die Reihe $\sum_{k=4}^\infty \frac{1}{k\log(k)} \cdot \log\bigl(\log(k)\bigr)^{-\mu}$ konvergiert.

   (3 + 3 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.