Prof. Dr. U. Stadtmüller
Dr. M. Harder

Winter 2016/2017
27.10.2016
Blatt 03

Übungen zu Analysis II

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Donnerstag, den 03.11.2016 vor den Übungen)

1. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) := \frac{x}{k^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}$ gegeben.

   (a) Konvergiert die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig?

   (b) Gilt $\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$?

   (3 + 2 Punkte)

2. Für $\mu \in \mathbb{R}$ und für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionen $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

   $$f_k(x) = \frac{k^\mu x}{(1+k^2x^2)^2}$$

   für $x \in [0,1]$.

   (a) Bestimme alle $\mu \in \mathbb{R}$, so dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise auf $[0,1]$ konvergiert.

   (b) Bestimme alle $\mu \in \mathbb{R}$, so dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[0,1]$ konvergiert.

   (c) Bestimme alle $\mu \in \mathbb{R}$, so dass $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$ gilt.

   (3 + 3 + 3 Punkte)

3. Es sei $f_k\colon \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) := \frac{\sin(kx)}{k^2}$.

   (a) Zeige, dass $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ auf $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ gleichmäßig konvergiert.

   (b) Zeige, dass $f\colon \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ auf $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ differenzierbar ist.

   Hinweis: Es könnte hilfreich sein, $\cos(kx) = \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{ikx}\right)$ zu verwenden und dass $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung ist.

   (3 + 3 Punkte)

4. Es seien $p \geq q > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Außerdem seien $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$.

   (a) Zeige, dass dann

   $$\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1}$$

   gilt.

   (b) Es sei $p > q > 0$ und $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Zeige, dass $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ existieren, so dass in (1) Gleichheit gilt. Zeige außerdem, dass $y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}$ existieren, so dass die Ungleichung strikt ist.

   (3 + 1 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

https://www.uni-ulm.de/?id=83444