Prof. Dr. U. Stadtmüller
Dr. M. Harder

Winter 2016/2017
03.11.2016
Blatt 04

Übungen zu Analysis II

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Donnerstag, den 10.11.2016 vor den Übungen)

1. (a) Es sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_1^2 \mathrm{e}^{-t} \sin\big(xt^2\big)\,\mathrm{d}t$ gegeben. Zeige, dass F differenzierbar ist und bestimme F' (dabei darf die Existenz des Integrals vorausgesetzt werden).

   (b) Es seien $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\alpha < \beta$ gegeben. Außerdem sei $f\colon [a,b] \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ gleichstetig in beiden Variablen. Zeige, dass dann die Integrale

$$\int_a^b \int_\alpha^\beta f(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_\alpha^\beta \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

   existieren und übereinstimmen.

(2 + 3 Punkte)

2. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $p \geq 1$ sei die Abbildung $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$d_p(x,y) := \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

   gegeben. Die Abbildung $d_0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist durch $d_0(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ gegeben.

   (a) Es sei $p \geq 1$. Zeige, dass d_p auf $\mathbb{R}^n$ eine Metrik ist.

   (b) Zeige, dass d_0 auf $\mathbb{R}^n$ eine Metrik ist.

   (c) Zwei Metriken d und $\tilde{d}$ auf einer Menge M heißen *äquivalent*, wenn Konstanten $c_1, c_2 > 0$ existieren, so dass

$$c_1 d(x,y) \leq \tilde{d}(x,y) \leq c_2 d(x,y)$$

   für alle $x, y \in M$ gilt. Zeige, dass für $p, q \geq 1$ die Metriken d_p und d_q auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Zeige außerdem, dass d_p und d_∞ äquivalent sind.

   (d) Zeige, dass d_0 und d_∞ auf $\mathbb{R}^n$ nicht äquivalent sind. Zeige außerdem, dass eine bezüglich d_0 konvergente Folge auch bezüglich d_∞ konvergiert, die Umkehrung im Allgemeinen aber falsch ist.

(2 + 2 + 3 + 3 Punkte)

3. Skizziere den Einheitskreis $\big\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,0) = 1\big\}$ für alle Metriken $d \in \Big\{d_0, d_1, d_{\frac{3}{2}}, d_2, d_4, d_\infty\Big\}$ (wobei d_0 und d_p für $p \geq 1$ wie in Aufgabe 2 definiert sind und d_∞ wie in der Vorlesung definiert ist).

(3 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Betrachte die Menge $C[0,1]$ mit den Metriken d_2 und d_∞ aus der Vorlesung.

   (a) Zeige, dass bezüglich d_2 eine Cauchyfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$ existiert, die nicht konvergiert, dass also für diese Folge kein $f \in C[0,1]$ existiert mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

   (b) Zeige, dass ein $c_2 > 0$ existiert, so dass $d_2(f,g) \leq c_2 d_\infty(f,g)$ für alle $f,g \in C[0,1]$ gilt.

   (c) Zeige, dass die Metriken d_2 und d_∞ auf $C[0,1]$ nicht äquivalent sind.

(2 + 2 + 2 Punkte)

5. Wir betrachten den Folgenraum ℓ^2, der durch

$$\ell^2 := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

gegeben ist. Zeige, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2$ für alle $x, y \in \ell^2$ konvergiert. Zeige außerdem, dass $d_2 \colon \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$d_2(x,y) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine Metrik auf ℓ^2 ist.

(2 Punkte)