Prof. Dr. U. Stadtmüller
Dr. M. Harder

Winter 2016/2017
10.11.2016
Blatt 05

Übungen zu Analysis II

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Donnerstag, den 17.11.2016 vor den Übungen)

1. Es sei (M,d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq M$ seien nicht leer.

   (a) Zeige, dass $d(A,B) = d\big(\overline{A}, \overline{B}\big)$ gilt.

   (b) Zeige, dass für $x \in M$ genau dann $d(x,A) = 0$ gilt, wenn $x \in \overline{A}$ gilt.

   (2 + 2 Punkte)

2. Betrachte die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^4$ mit

$$x_n := \Big(\cos\big(\tfrac{n\pi}{2}\big), \sin\big(\tfrac{n\pi}{2}\big), \log\Big(\big(\tfrac{n-1}{n}\big)^n\Big), \mathrm{e}^{-n}\Big)^\top.$$

   und bestimme alle Häufungswerte der Folge bezüglich der Metriken d_1 und d_∞.

   (3 Punkte)

3. Es sei (M,d) ein metrischer Raum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ eine Folge. Außerdem seien

$$A := \big\{x \in M \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = a_n\big\}$$
$$B := \big\{x \in M \mid x \text{ ist Häufungswert von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big\}$$

   gegeben.

   (a) Zeige, dass $A' \subseteq B$ gilt.

   (b) Gib eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}, d_2)$ an, so dass $A' \neq B$ gilt und zeige dies.

   (2 + 2 Punkte)

4. Es seien $m > 1$, $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ und B sei endlich.

   (a) Zeige, dass bezüglich der Metrik d_2 jeder isolierte Punkt von A auch ein Randpunkt von A ist.

   (b) Bestimme die Menge der isolierten Punkte von $A := (0,1)^m$ bezüglich der diskreten Metrik d_0 (siehe Blatt 04) und zeige, dass keiner dieser Punkte ein Randpunkt von A ist (ebenfalls bezüglich d_0).

   (c) Zeige, dass B bezüglich d_2 abgeschlossen ist, aber bezüglich d_0 offen.

   (d) Es seien $a, b \in \mathbb{R}^m$ mit $a < b$. Zeige, dass dann $(a,b)^\mathsf{c} \neq (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ gilt.

   (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

5. Es sei $A := [0,1]^2 \setminus \big\{(x,y)^\top \in [0,1]^2 \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = \frac{1}{n}\big\}$. Außerdem sei $B := A \cup \big\{\big(\frac{3}{n}, \frac{3}{n}\big)^\top \mid n \in \mathbb{N}\big\}$. Bestimme $\mathring{B}, \overline{B}, \partial B, B'$ sowie die Menge der isolierten Punkte von B bezüglich der Metrik d_∞.

   (5 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

https://www.uni-ulm.de/?id=83444