

Übungen zu Analysis II

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Donnerstag, den 01.12.2016 vor den Übungen)

1. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$. Zeige, dass (a, b) topologisch zusammenhängend ist. (3 Punkte)

2. (a) In einem metrischen Raum (M, d) sei $A \subseteq M$ topologisch zusammenhängend und $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$. Zeige, dass dann auch B topologisch zusammenhängend ist.

(b) Es sei $A := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0, x_2 \in [-1, 1]\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (0, 1], x_2 = \sin(x_1^{-1})\}$. Zeige, dass A bezüglich d_2 topologisch zusammenhängend, aber nicht kurvenweise zusammenhängend ist.

(3 + 3 Punkte)

3. Es sei $c := \frac{1}{2\pi}$. Betrachte die Kurve $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $x(t) := \begin{pmatrix} e^{ct} \cos(t) \\ e^{ct} \sin(t) \end{pmatrix}$.

(a) Zeige, dass die Kurve rektifizierbar ist und bestimme die Länge der Kurve für $a = -\pi, b = \pi$.

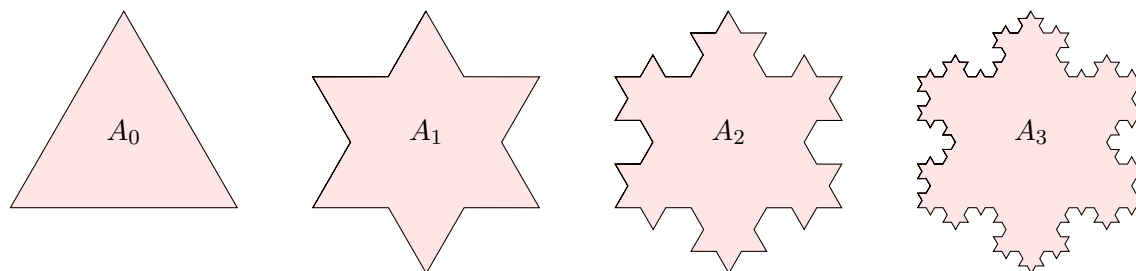
(b) Bestimme die Länge der Kurve für $b = 0$ und $a \rightarrow -\infty$ und skizziere sie.

(c) Zeige, dass die Kurve jeden Kreis um den Ursprung in genau einem Punkt schneidet und bestimme den Cosinus des Schnittwinkels.

(3 + 2 + 3 Punkte)

4. Die Menge A_0 sei ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $a_0 = 1$. Die Menge A_{n+1} entsteht aus A_n , indem mittig an jeder Kante ein gleichseitiges Dreieck der Kantenlänge $a_{n+1} := \frac{a_n}{3}$ hinzugefügt wird. Wir betrachten außerdem $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

Skizze:



(a) Bestimme eine Kurve, die den Rand von A_0 einmal gegen den Uhrzeigersinn durchläuft, beginnend mit der linken unteren Ecke. Man darf davon ausgehen, dass diese Ecke im Punkt $(0, 0)^T$ liegt.

(b) Zeige, dass A eine endliche Fläche besitzt und berechne diese.

(c) Zeige, oder widerlege, dass der Rand von A rektifizierbar ist und bestimme ggf. seine Länge.

(2 + 3 + 3 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.