Prof. Dr. U. Stadtmüller
Dr. M. Harder

Winter 2016/2017
01.12.2016
Blatt 08

Übungen zu Analysis II

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Donnerstag, den 08.12.2016 vor den Übungen)

1. Zeige oder widerlege, dass die folgenden Abbildungen differenzierbar sind und bestimme gegebenenfalls die Ableitung. Falls eine Funktion nicht differenzierbar ist, untersuche sie auf Stetigkeit sowie auf die Existenz der partiellen Ableitungen.

   (a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\sin(y)\cos(z) \\ x\sin(y)\sin(z) \\ x\cos(y) \end{pmatrix}$ für $(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3$.

   (b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 0$ falls $x = y = 0$ und $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ für $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^\top\}$.

   (3 + 3 Punkte)

2. Es seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f_A(x) \coloneqq x^\top A x$ sowie $f_a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f_a(x) \coloneqq \|x-a\|_2^2$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Zeige oder widerlege, dass f_a differenzierbar ist und bestimme gegebenfalls die Ableitung.

   (b) Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$. Zeige, dass die Richtungsableitung von f_A in Richtung v im Punkt x durch $v^\top(A^\top + A)x$ gegeben ist.

   (c) Zeige, dass f_A auf $\mathbb{R}^n$ beliebig oft stetig differenzierbar ist.

   (2 + 3 + 2 Punkte)

3. Es sei $M \subset \mathbb{R}^m$ offen mit $0 \in M$. Außerdem sei $f\colon M \to \mathbb{R}^k$ und für ein $\alpha > 1$ gelte $\|f(x)\|_2 \le \|x\|_2^\alpha$ für alle $x \in M$. Zeige, dass f dann in 0 differenzierbar ist und dass $f'(0) = 0$ gilt.

   (4 Punkte)

4. Zeige, dass es keine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_x(x,y) = y$ und $f_y(x,y) = xy$ für alle $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$ gibt.

   (3 Punkte)

5. Berechne die folgenden Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} \cos(t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t.$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \pi x \cos(\pi x t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t.$

   (2 + 2 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

https://www.uni-ulm.de/?id=83444