Prof. Dr. U. Stadtmüller
Dr. M. Harder

Winter 2016/2017
15.12.2016
Blatt 10

Übungen zu Analysis II

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Donnerstag, den 22.12.2016 vor den Übungen)

1. Bestimme alle lokalen und globalen Extremwerte der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (x^2 + 4y^2)\exp(-4x^2 - y^2).$$

(5 Punkte)

2. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Zeige oder widerlege die Konvexität und strikte Konvexität folgender Funktionen:

   (a) $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \|x\|_4^4$. Untersuche außerdem die Hesse-Matrix auf Definitheit.

   (b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (x-y)^2 + 4x - 2y$

   (c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := \exp(xy)$.

   (d) Zeige, dass eine konvexe Funktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ in jeder Variable konvex ist, dass aus der Konvexität in jeder Variable aber im Allgemeinen nicht die Konvexität von f folgt.

(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

3. Bestimme alle Extremwerte der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 4y^2 - 3xy$ auf der Menge $\big\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\big\}$.

(5 Punkte)

4. Bestimme die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes, die die folgenden Funktionen nicht erfüllen. Welche der Resultate des Banachschen Fixpunktsatzes gelten dennoch (Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes, ggf. Konvergenz von $x_{n+1} := f(x_n)$ gegen den Fixpunkt für $n \to \infty$ und beliebiges x_1 aus dem Definitionsbereich von f)?

   (a) $f\colon [-\pi,\pi] \to [-1,1]$ mit $f(x) = -\sin(x)$.

   (b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$.

   (c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = Ax + (1,1)^\top$ und $A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Gib außerdem alle Fixpunkte an.

(2 + 2 + 3 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

https://www.uni-ulm.de/?id=83444