Prof. Dr. U. Stadtmüller
Dr. M. Harder

Winter 2016/2017
12.01.2017
Blatt 12

Übungen zu Analysis II

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Donnerstag, den 19.01.2017 vor den Übungen)

1. (a) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^m$ und A sei sternförmig bezüglich eines Punktes $x_0 \in A$ und B sei konvex. Zeige oder widerlege, dass A dann auch konvex sein muss. Zeige oder widerlege außerdem, dass ein $y_0 \in B$ existiert, so dass B bezüglich y_0 sternförmig ist.

   (b) Es seien $x, y \in \mathbb{R}^m$ und es sei $\varepsilon > 0$. Zeige, dass $U_\varepsilon(x) \cup U_\varepsilon(y)$ genau dann sternförmig (bezüglich eines Punktes x_0) ist, wenn $\|x - y\|_2 < 2\varepsilon$ gilt. Ist x_0 dann eindeutig?

   (2 + 2 Punkte)

2. Es sei $g\colon (0, \infty)$ stetig differenzierbar und $f\colon \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \big(\mathbb{R}^m\big)^\top$ mit $f(x) := g\big(\|x\|_2\big)x^\top$.

   (a) Zeige, dass das Kurvenintegral über f auf allen Wegen, die auf der Oberfläche einer Kugel um den Ursprung verlaufen (also $\|x(t)\|_2 = r$ für ein $r > 0$ und für alle t) verschwindet.

   (b) Zeige, dass eine Stammfunktion existiert und gib diese für denn Fall $g(r) = r^k$ in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{Z}$ an.

   (3 + 3 Punkte)

3. Es seien Vektorfelder $f_i\colon \mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}^3)^\top$, $i = 1, 2$ gegeben durch

$$f_1(x, y, z) = \big(x(y^2 + z^2) + 1,\ y(x^2 + z^2),\ z(x^2 + y^2) - 1\big) \text{ und}$$
$$f_2(x, y, z) = (x + z, x + y + z, x + z).$$

   (a) Berechne, falls existent, eine Stammfunktion.

   (b) Berechne die Wegintegrale von $(0, 0, 0)^\top$ nach $(1, 1, 1)^\top$ zunächst entlang der x-Achse, dann parallel zur y-Achse und schließlich parallel zur z-Achse.

   (3 + 3 Punkte)

4. (a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0, 0)^\top\big\} \to \big(\mathbb{R}^2\big)^\top$ mit

$$f(x, y) := \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}\right) \quad \text{für } (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0, 0)^\top\big\}.$$

   Bestimme eine Stammfunktion von f auf einer größtmöglichen Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0, 0)^\top\big\}$. Zeige oder widerlege, dass die Kurvenintegrale über f wegunabhängig sind.

   (b) Es sei $g(x, y) := \big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\big)^\top$ für $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0, 0)^\top\big\}$ und $x(t) := \big(\cos(t), \sin(t)\big)^\top$ für $t \in [0, 2\pi]$. Berechne $\int_0^{2\pi} g \,\mathrm{d}x(t)$.

   (2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

5. Es sei $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (x+y)\,\mathrm{e}^{x+y}$.

   (a) Zeige mit der Definition des Riemann-Integrals, dass f auf $[0,1]^2$ integrierbar ist.

   (b) Bestimme den Wert des Integrals.

(3 + 3 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.