Prof. Dr. U. Stadtmüller
Dr. M. Harder

Winter 2016/2017
19.01.2017
Blatt 13

Übungen zu Analysis II

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Donnerstag, den 26.01.2017 vor den Übungen)

1. Zeige oder widerlege, dass für folgende Intervalle $I \subset \mathbb{R}^m$ und Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ das Integral $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert und berechne es gegebenenfalls.
   (a) $I = [-1,0] \times [0,1] \times [1,2]$, $f(x) = x_1^3 + x_1x_2^2 + x_1x_2x_3$.
   (b) $I = \left[0, \sqrt{2}\right] \times [0,\pi] \times [-2,-1]$, $f(x) = \exp\left(-x_1^2 - x_3^2\right)\cos(2x_2)\log\left(\sqrt{|x_3|}\right)$.
   (c) $I = [\varepsilon,1] \times [\delta,1]$ mit $\varepsilon, \delta \in (0,1)$, $f(x) = (x_1x_2)^{-\frac{1}{2}}$. Zeige oder widerlege außerdem, dass
   $$\lim_{(\varepsilon,\delta)^\top \to (0,0)^\top} \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$$
   existiert.
   (d) $I = [0,1]^2$, $f(x) = x_2\left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)^{-\frac{3}{2}}$.

(2 + 2 + 3 + 2 Punkte)

2. (a) Zeige, dass die Menge $\mathcal{M} := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \|x\|_2 = 1\right\}$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^3$ ist.
   (b) Gib je ein Beispiel für eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und eine Lebesgue-Nullmenge $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ an, so dass $f(\mathcal{M})$ eine oder keine Lebesgue-Nullmenge im $\mathbb{R}^2$ ist. Zeige jeweils, dass die gewünschten Eigenschaften erfüllt sind.
   (c) Für $k \in \{1,2\}$ seien $\mathcal{M}_k \subset \mathbb{R}^{m_k}$ Lebesgue-Nullmengen in $\mathbb{R}^{m_k}$. Zeige, dass dann auch $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ ist.

(2 + 3 + 2 Punkte)

3. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 1$ falls $y \in \mathbb{Q}$ und $f(x,y) = 2x$ falls $y \notin \mathbb{Q}$.
   (a) Zeige, dass $g(t) := \int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}x$ für alle $t \in [0,1]$ existiert und stetig ist.
   (b) Zeige, dass f dennoch auf $[0,1]^2$ nicht Riemann-integrierbar ist.

(2 + 2 Punkte)

4. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \frac{1}{q}$ falls $x, y \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$ für $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ und sich $\frac{p}{q}$ nicht weiter kürzen lässt. Andernfalls gelte $f(x,y) = 0$. Zeige, dass f auf $[0,1]^2$ Riemann-integrierbar ist und bestimme $\int_{[0,1]^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(3 Punkte)

5. Es sei $I \subset \mathbb{R}^m$ ein kompaktes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und nichtnegativ (also $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$). Außerdem gelte $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Zeige, dass dann auch $f(x) = 0$ für alle $x \in I$ gelten muss.

(3 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

https://www.uni-ulm.de/?id=83444