Prof. Dr. U. Stadtmüller
Dr. M. Harder

Winter 2016/2017
26.01.2017
Blatt 14

Übungen zu Analysis II

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Donnerstag, den 02.02.2017 vor den Übungen)

1. Es sei $M \subset \mathbb{R}^m$ Jordan-messbare Menge.
   (a) Zeige, dass $\overline{M}$ und $\mathring{M}$ Jordan-messbar sind.
   (b) Zeige, dass M genau dann eine Lebesgue-Nullmenge ist, wenn $|M| = 0$ gilt.
   (c) Es seien zusätzlich $r > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Zeige, dass die Mengen
   $$rM := \{x \in \mathbb{R}^m \mid x = ry \text{ für ein } y \in M\}$$
   $$M + x_0 := \{x \in \mathbb{R}^m \mid x = y + x_0 \text{ für ein } y \in M\}$$
   Jordan-messbar sind und bestimme $|rM|$ sowie $|M + x_0|$.

(2 + 3 + 3 Punkte)

2. Es sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Jordan-messbaren Mengen in $\mathbb{R}^m$.
   (a) Zeige, dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ Jordan-messbar ist.
   (b) Zeige, dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ im Allgemeinen nicht Jordan-messbar ist (selbst wenn $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ beschränkt ist).
   (c)* Zeige oder widerlege, dass die Menge A aus Aufgabe 4 von Blatt 07 (Kochsche Schneeflocke) Jordan-messbar ist.

(3 + 2 + 3 Punkte)

3. Zeige oder widerlege, dass die folgenden Mengen M Jordan-messbar sind und bestimme gegebenenfalls ihren Jordan-Inhalt $|M|$.
   (a) $M = \left\{x \in [0,1]^2 \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \le x_2 \le 1 - \left|2n(n+1)x_1 - 2n - 1\right|\right\}$.
   (b) $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right), -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}\}$.
   (c) $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \le 1\}$ für $a, b, c > 0$.
   (d) $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \le R^2, (x_1 + R)^2 + x_2^2 \ge 2R^2\}$ für $R > 0$.

(3 + 3 + 3 + 3 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

https://www.uni-ulm.de/?id=83444