Prof. Dr. U. Stadtmüller
Dr. M. Harder

Winter 2016/2017
02.02.2017
Blatt 15

Übungen zu Analysis II

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Donnerstag, den 09.02.2017 vor den Übungen)

1. Rotiert man eine Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ um die x-Achse oder um die y-Achse, erhält man die Rotationskörper M_x und M_y mit

$$M_x = \Big\{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \varphi \in [0,2\pi],\ \exists (x_0,y_0)^\top \in M \text{ mit } (x,y,z)^\top = \big(x_0, y_0\cos(\varphi), y_0\sin(\varphi)\big)^\top\Big\}$$
$$M_y = \Big\{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \varphi \in [0,2\pi],\ \exists (x_0,y_0)^\top \in M \text{ mit } (x,y,z)^\top = \big(x_0\cos(\varphi), y_0, x_0\sin(\varphi)\big)^\top\Big\}$$

Gegeben ist die Ellipse $M := \big\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + \frac{1}{4}y^2 \le 1\big\}$. Bestimme das Volumen von M_x und M_y.

(4 Punkte)

2. Zeige oder widerlege, dass folgende Integrale existieren und berechne sie gegebenenfalls.

(a) $\int_M 1 \,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ mit $M = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x = \big(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\big)^\top, 0 \le r \le \big|\sin\big(\frac{n}{2}\varphi\big)\big|\Big\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ mit $M = \big\{(x+2y, 2x+3y)^\top \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\big\}$.

(c) $\int_M \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ mit $M = \big\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4, x_2 \ge 1\big\}$.

(d) $\int_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ mit $M = \big\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \le x_3 \le 1\big\}$.

(e) $\int_M y\exp\Big(\sqrt{x^2+y^2}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ mit $M = \big\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 9, y \ge 0\big\}$.

(f) $\int_M \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ mit $M = U_r(0,0,0)$ für ein $r > 0$.

(3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 Punkte)

3. Es seien $0 < a < b$ und $0 < c < d$ sowie

$$M := \big\{x \in \mathbb{R}^2 \mid ax_2 \le x_1^2 \le bx_2, cx_1 \le x_2^2 \le dx_1\big\}$$

Bestimme den Flächeninhalt von M.

Hinweis: Die parabolische Koordinatentransformation, $u = \frac{x_1^2}{x_2}$ und $v = \frac{x_2^2}{x_1}$ ist vielleicht hilfreich.

(3 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

https://www.uni-ulm.de/?id=83444