Prof. Dr. U. Stadtmüller
Dr. M. Harder

Winter 2016/2017
09.02.2017
Blatt 16

Übungen zu Analysis II

(keine Abgabe, keine Korrektur, Besprechung am 16.02.2017)

1. Bestimme den Inhalt folgender Flächen $M \subset \mathbb{R}^3$:

   (a) $M \coloneqq f\big([-\pi,\pi]^2\big)$ mit

   $$f(\varphi,\theta) = \Big(\big(R+\cos(\varphi)\big)\cos(\theta), \big(R+\cos(\varphi)\big)\sin(\theta), \sin(\varphi)\Big)^\top$$

   für ein $R > 1$.

   (b) $M = \big\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = x_1 x_2\big\}$

2. (a) Es sei $B \coloneqq \big\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| \leq 1\big\}$ und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = (1,0)^\top$ sei eine Kurve, die ∂B entgegen des Uhrzeigersinns durchläuft. Weiter seien $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) \coloneqq \big(x^2y^2, \cos(3x)\big)^\top$ und $g(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)^\top$ gegeben. Bestimme ${}^\gamma\!\int f$ und ${}^\gamma\!\int g$.

   (b) Es seien $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

   $$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix}$$
   $$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 2\pi - t + \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

   zwei Zykloide und B sei der von $\gamma_1\big([0,2\pi]\big)$ und $\gamma_2\big([0,2\pi]\big)$ begrenzte Bereich. Bestimme $|B|$.

3. Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ mit

   $$a_n = \begin{cases} \Big(\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{2j+1}, \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j+1}}{2j}\Big)^\top + c \text{ falls } n = 2k+1 \\ \Big(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{2j+1}, \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j+1}}{2j}\Big)^\top + c \text{ falls } n = 2k \end{cases}$$

   für $n \in \mathbb{N}$ für $c \coloneqq \big(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\log(2)}{2}\big)^\top$. Außerdem sei die Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben, die für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \big[1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}\big]$ gerade a_{n-1} und a_n durch eine gerade Linie verbindet und es gelte $\gamma(1) = (0,0)^\top$. Zeige, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert und dass γ stetig, aber nicht rektifizierbar ist.

https://www.uni-ulm.de/?id=83444