Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 9. Februar 2017, vor den Übungen

1. Es sei q eine zu p verschiedene ungerade Primzahl, $K = GF(q)$ und ζ_p eine primitive p- te Einheitswurzel in einer Erweiterung von K sowie $L = K(\zeta_p)$. Weiter sei

$$G_p := \sum_{m=0}^{p-1} \zeta_p^{m^2} \in L$$

die Gaußsche Summe.

(a) Es sei $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ das Legendre- Symbol.

i. Zeige

$$G_p = \sum_{m=0}^{p-1} \zeta_p^{qm^2} = G_p^q.$$

ii. Zeige

$$\left(\frac{(-1)^{(p-1)/2}p}{q}\right) = 1.$$

(b) Es sei $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ und

$$G'_p := \sum_{m=0}^{p-1} \zeta_p^{qm^2}.$$

i. Zeige $G_p + G'_p = 0$.

ii. Zeige

$$\left(\frac{(-1)^{(p-1)/2}p}{q}\right) = -1.$$

(c) Fasse die beiden Formeln zum quadratischen Reziprozitätsgesetz zusammen. (10 Punkte)

2. Es sei ζ_k eine k- te Einheitswurzel und $\mathbb{Q}(\zeta_k)$ der Körper der k- ten Einheitswurzeln. Zeige, dass die Größe $\zeta_k + \zeta_k^{-1}$ für $k > 2$ stets einen Zwischenkörper vom Grad $\frac{1}{2}\varphi(k)$ über $\mathbb{Q}$ erzeugt. (6 Punkte)

3. (a) Wie betrachten nun den Körper der siebten Einheitswurzeln als Körpererweiterung über $\mathbb{Q}$. Bestimme deren Galoisgruppe und die zugehörigen Zwischenkörper.

   (b) Was ist das Minimalpolynom des Elements $\zeta_7 + \zeta_7^{-1}$? (8 Punkte)