ulm university universität ulm

Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte, alles Zusatzpunkte
Abgabe: Donnerstag, 16. Februar 2017, vor den Übungen

1. Bestimme den Isomorphietyp der Galoisgruppe $G(f, \mathbb{Q})$ für folgende Polynome $f \in \mathbb{Q}[X]$:
   (a) $f(X) = X^3 - 3X - 1$
   (b) $f(X) = X^3 - 4X - 1$
   (c) $f(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ (9 Punkte)

2. Es sei $p \geq 5$ eine Primzahl, $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel mit $\deg(f) = p$ und genau $p - 2$ reelle Nullstellen.
   (a) Zeige $G(f, \mathbb{Q}) \cong S_p$, die symmetrische Gruppe.
   (b) Zeige, dass f nicht auflösbar ist. (9 Punkte)

3. Es sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein normiertes irreduzibles Polynom mit $\deg(f) = n$ und der Galoisgruppe $G = G(f, K) \in S_n$.
   Ein Polynom $g \in K[X]$ geht aus f durch eine lineare Substitution hervor, d.h. $g(X) = f(aX + b)$ für $a, b \in K$ mit $a \neq 0$.
   (a) Zeige:
      i. Das Polynom g ist irreduzibel.
      ii. Es gilt $\deg(g) = n$.
      iii. Es ist $G(g, K) = G(f, K)$.
   (b) Bestimme die Galoisgruppe von
      i. $f(X) = X^3 + 6X^2 + 11X + 7$
      ii. $f(X) = X^5 - 405X + 3$
      iii. $f(X) = X^5 + 4X^4 - 2$. (6 Punkte)