Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 3. November 2016, vor den Übungen

1. (a) Bestimme die maximalen Ideale von Aufgabe 1 von Übungsblatt 1.
   (b) Betrachte in dem Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ die beiden Ideale $I_1 = (X)$ und $I_2 = (2, X)$. Entscheide, ob die Ideale prim bzw. maximal sind. (5 Punkte)

2. Es sei
$$R = \left\{ \frac{a}{b} \colon a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}, \operatorname{ggT}(b, 30) = 1 \right\}.$$
Bestimme die Ideale und maximalen Ideale von R. (5 Punkte)

3. Wir wollen Satz 1.3.13 beweisen, für welche Gruppen $((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*, \cdot)$ mit $m \in \mathbb{N}$ eine Primitivwurzel existiert. Es seien $p, q \in \mathbb{P} \backslash \{2\}$ mit $p \neq q$ und $k \in \mathbb{N}$.
Aus der Vorlesung wissen wir bereits, dass für $m = p$ eine Primitivwurzel existiert.
   (a) i. Es sei g eine Primitivwurzel modulo p, und wir betrachten die Zahlen $c_l := (g + pl)^{p-1}$ mit $l \in \mathbb{N}$ und $l \leq p - 1$. Zeige, dass $b_l \in \mathbb{Z}$ existieren, so dass $c_l = 1 + pb_l$ gilt.
   ii. Zeige, dass ein $\nu \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ mit $p \nmid b_\nu$ existiert.
   iii. Es sei $d := \operatorname{ord}_{p^k}(g + p\nu)$. Zeige, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d = p^{n-1} \cdot (p-1)$ gilt.
   iv. Zeige $n = k$ und dass $g + p\nu$ eine Primitivwurzel modulo p^k ist.
   v. Zeige, dass auch modulo $2 \cdot p^k$ eine Primitivwurzel existiert.
   (b) Zeige, dass der Modul $m = 2^k$ nur für $k \in \{1, 2\}$ eine Primitivwurzel besitzt.
   (c) Zeige, dass in allen übrigen Fällen keine Primitivwurzeln existieren. (8 Punkte)

4. Es seien $x_1, \ldots, x_m$ verschiedene reelle Zahlen sowie $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$. Weiter sei für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq j \leq m$ eine Folge reeller Zahlen $y_{0,j}, \ldots, y_{n_j,j}$ gegeben.
   (a) Zeige, dass für $i \neq j$ die Hauptideale $((x - x_i)^{n_i+1})$ und $((x - x_j)^{n_j+1})$ komaximal sind.
   (b) Zeige mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes, dass eine Folge von Polynomen $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{R}[X]$ existiert, für die folgendes gilt:
   - Für alle $i \neq j$ ist $P_j^{(k)}(x_i) = 0$ für $0 \leq k \leq n_i$.
   - Es gilt $P_j(x_j) = 1$.
   - Es gilt $P_j^{(k)}(x_j) = 0$ für $1 \leq k \leq n_j$.

   Hinweis:
   Dabei sei $P_j^{(0)}(x_i) = P_j(x_i)$ und für $k \geq 1$ sei $P_j^{(k)}(x_i)$ die k- te Ableitung von P_j an der Stelle x_i.
   (c) Zeige, dass genau ein Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad $\deg(P) \leq (n_1 + 1) + \ldots + (n_m + 1) - 1$ existiert, für das $P^{(k)}(x_j) = y_{k,j}$ für $0 \leq k \leq n_j$ gilt. (6 Punkte)