Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 10. November 2016, vor den Übungen

1. Es sei $d \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl und $R = I(\sqrt{d}) := \{a_0 + a_1\sqrt{d}\colon\ a_0, a_1 \in \mathbb{Z}\}$. Es sei $(R^*, \cdot)$ die Einheitengruppe von R. Für $\alpha = a_0 + a_1\sqrt{d}$ sei $\alpha' = a_0 - a_1\sqrt{d}$. Schließlich sei $N(\alpha) = \alpha\alpha'$. Zeige:

   (a) $(R, +, \cdot)$ ist ein Integritätsring.

   (b) Für $\alpha, \beta \in R$ ist $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$.

   (c) Es gilt genau dann $\alpha \in R^*$, wenn $N(\alpha) \in \{-1, 1\}$ ist.

   (d) Für $\alpha \in R^*$ und $\alpha > 1$ gilt $|\alpha'| < 1$.

   (e) Es sei $\alpha = a_0 + a_1\sqrt{d} \in R^*$ und $\alpha > 1$. Dann gilt $a_0, a_1 \in \mathbb{N}$.

   Hinweis:
   Betrachte die Ausdrücke $\alpha + \alpha'$ und $\alpha - \alpha'$ und verwende Teilaufgabe d).
   Ferner beachte $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$.

   (f) Zeige, dass falls $R^* \neq \{-1, 1\}$ gilt, ein kleinstes $\alpha \in R^*$ mit $\alpha > 1$ existiert, die sogenannte Grundeinheit $\alpha = \eta$.

   (g) Zeige, dass dann $R^* = \{(-1)^m \cdot \eta^k\colon m \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{Z}\}$ gilt.

   Hinweis:
   Nimm an, diese Aussage ist falsch und betrachte das kleinste Gegenbeispiel α_0 mit $\alpha_0 > 1$. Bilde dann $\alpha_0\eta^{-1}$.

   (h) Finde sämtliche Lösungen der Diophantischen Gleichungen $x^2 - 3y^2 = \pm 1$ bzw. zeige ihre Unlösbarkeit.

   (i) Auf der "Arithmetik an der A7" im Januar 2013 in Würzburg wurde folgendes Problem diskutiert:
   "Wenn man zufällig zwei Schwestern aus der Familie Burth auf der Straße trifft, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide blaue Augen haben, genau 0,5.
   Dabei sei die Begegnung auf der Straße eine echte Zufallsauswahl unter allen Töchtern dieser Familie. Wieviele Töchter hat die Familie Burth und wieviele davon sind blauäugig?"

      i. Gib eine Lösung dieser Aufgabe an.

      ii. Gibt es zu diesem Problem unendlich viele Lösungen?
      Falls ja, so gib einen Weg an, diese alle zu bestimmen.

   Hinweis:
   Im Januar 2012 fand die "Arithmetik an der A7" in Ulm statt.
   Dabei ist diese Aufgabe ein schönes Beispiel einer Aufgabe des Instituts für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie. (12 Punkte)

2. Es sei R ein kommutativer Ring.

   (a) Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in R$ mit $\alpha\beta \sim \gamma$. Zeige, dass $(\alpha)(\beta) = (\gamma)$ gilt.

   Im folgenden sei stets $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   Weiter sei $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$, $\mathfrak{p}_1 = (\{3, 2 + \sqrt{-5}\})$ und $\mathfrak{p}_2 = (\{3, 2 - \sqrt{-5}\})$.
   Zudem seien die Behauptungen

$$R/\mathfrak{p}_1 = \{a + \mathfrak{p}_1 \colon a \in \{0, 1, 2\}\} \quad [1]$$
$$R/\mathfrak{p}_2 = \{a + \mathfrak{p}_2 \colon a \in \{0, 1, 2\}\} \quad [2]$$

   aufgestellt. Die Behauptung [2] darf im folgenden ohne Beweis verwendet werden.
   Zeige:

   (b) Für $\alpha, \beta \in R$ ist $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

   (c) Es gilt $R^* = \{-1, 1\}$.

   (d) Es gilt $\mathfrak{p}_1 \neq R$ und $\mathfrak{p}_2 \neq R$.

   Hinweis:
   Zeige zuerst $\mathfrak{p}_1 = R \Leftrightarrow \mathfrak{p}_2 = R$ und $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset (3)$.

   (e) Zeige die Behauptung [1].

   (f) Die Ideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ sind Primideale.

   (g) Das Ideal $\mathfrak{p}_1$ ist kein Hauptideal.

   (h) Es gilt $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 = (3)$, $\mathfrak{p}_1^2 = (2 + \sqrt{-5})$, $\mathfrak{p}_2^2 = (2 - \sqrt{-5})$ und $\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_2^2 = (9)$. (12 Punkte)