Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 17. November 2016, vor den Übungen

1. Wir betrachten den Integritätsring $R = I(\sqrt[3]{2}) := \{a_0 + a_1\sqrt[3]{2} + a_2(\sqrt[3]{2})^2 \colon\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}$.
Weiter sei $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ mit $i^2 = -1$. Für $\alpha = a_0 + a_1\sqrt[3]{2} + a_2(\sqrt[3]{2})^2 \in I(\sqrt[3]{2})$ seien

$$\begin{aligned} \alpha^{(0)} &:= \alpha, \\ \alpha^{(1)} &:= a_0 + a_1\sqrt[3]{2}\zeta + a_2\sqrt[3]{2}^2\zeta^2 \quad \text{sowie} \\ \alpha^{(2)} &:= a_0 + a_1\sqrt[3]{2}\zeta^2 + a_2\sqrt[3]{2}^2\zeta. \end{aligned}$$

Weiter definieren wir $N(\alpha) := \prod_{k=0}^{2} \alpha^{(k)}$. Zeige:

(a) Für $\alpha \in R$ gilt $\alpha^{(1)}\alpha^{(2)} \in R$ und $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

(b) Für $\alpha, \beta \in R$ ist $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$.

(c) Es gilt genau dann $\alpha \in R^*$, wenn $N(\alpha) \in \{-1, 1\}$ ist.

(d) Für $\alpha \in R^*$ und $\alpha > 1$ gilt $|\alpha^{(1)}| = |\alpha^{(2)}| < 1$.

(e) Es sei $\alpha = a_0 + a_1\sqrt[3]{2} + a_2(\sqrt[3]{2})^2 \in R^*$ und $\alpha > 1$. Dann gilt $a_i \geq 0$ für $i \in \{0, 1, 2\}$.

Hinweis:
Betrachte die Ausdrücke $\alpha^{(0)} + \zeta^k\alpha^{(1)} + \zeta^{2k}\alpha^{(2)}$ für $k \in \{0, 1, 2\}$.

(f) Es gilt $R^* = \{(-1)^m \cdot \eta^k \colon m \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{Z}\}$ mit der Grundeinheit $\eta = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}^2$.

(g) Gib alle Lösungen der Diophantischen Gleichung $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 1$ an. (12 Punkte)

2. Es sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p$ mit einer Primzahl p. Weiter sei $\mathbb{P}$ der Primkörper von K.
Es sei L/K eine Körpererweiterung von K und $f_c(X) = X^p - X + c$ mit $c \in L$. Zeige:

(a) Die Abbildung $\varphi\colon L \to L$, $x \to x^p$ ist ein Körperisomorphismus.

(b) Ist $f_c(\alpha) = 0$ für ein $\alpha \in L$, so ist auch $f_c(\alpha + r) = 0$ für $r \in \mathbb{P}$. (6 Punkte)

3. Es sei K ein Körper. Unter dem Körper $K((X))$ der formalen Laurentreihen über K versteht man

$$K((X)) := \{f \colon \mathbb{Z} \to K\}.$$

Für f schreibt man auch

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)X^n.$$

Addition und Multiplikation sind nach den bekannten Rechenregeln für Potenzreihen definiert. Konvergenzüberlegungen spielen keine Rolle. Es sei $K_0 := \{f \in K \colon f(n) = 0 \text{ für } n \neq 0\}$.

(a) Zeige: $K((X))$ ist ein Körper.

(b) Bestimme $[K((X)) \colon K_0]$.

(c) Vergleiche die Charakteristiken $\mathrm{char}(K((X)))$ und $\mathrm{char}(K_0)$. (6 Punkte)