

Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 24. November 2016, vor den Übungen

1. Es sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i, \sqrt[3]{2})$ und $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$.

- (a) Bestimme $[L: \mathbb{Q}]$.
- (b) Finde sämtliche Automorphismen von L .
- (c) Für $\sigma, \tau \in G(L/\mathbb{Q})$ seien

$$\begin{aligned}\sigma(\sqrt{3}) &= -\sqrt{3}, \quad \sigma(i) = i, \quad \sigma(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\zeta \\ \tau(\sqrt{3}) &= \sqrt{3}, \quad \tau(i) = -i, \quad \tau(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\zeta^2.\end{aligned}$$

Bestimme $(\sigma \circ \tau)(\gamma)$ für $\gamma \in \{\sqrt{3}, i, \sqrt[3]{2}\}$. (12 Punkte)

2. Es sei L/K eine Körpererweiterung, $\alpha \in L$ und $[K(\alpha): K] = p$ mit einer Primzahl $p > 2$.

Zeige: $K(\alpha^2) = K(\alpha)$. (4 Punkte)

3. Zeige: In Aufgabe 2 von Übungsblatt 3 sind die Darstellungen der Ideale (3) , $(2 + \sqrt{-5})$, $(2 - \sqrt{-5})$ und (9) von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ als Produkt von Primidealen bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

(8 Punkte)