Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 15. Dezember 2016, vor den Übungen

1. Konstruiere eine Körpererweiterung K von $\mathbb{Q}$, die algebraisch, aber nicht endlich ist. (5 Punkte)

2. Es sei nochmals $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i, \sqrt[3]{2})$.

   (a) Zeige, dass die Galoisgruppe $G(L/\mathbb{Q})$ einen Normalteiler $N_3 \trianglelefteq G(L/\mathbb{Q})$ mit $|N_3| = 3$ besitzt.

   (b) Zeige, dass es einen Homomorphismus $\Phi\colon U_4 \to \mathrm{Aut}(N_3)$ mit einer Untergruppe $U_4 \leq G(L/\mathbb{Q})$ mit $|U_4| = 4$ gibt, so dass $G(L/\mathbb{Q}) \cong N_3 \times_\Phi U_4$ ist. (5 Punkte)

3. Es seien p eine Primzahl, K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p$, zudem Q der Quotientenkörper von $K[X]$ und X eine Unbestimmte über K. Weiter sei $f(Y) \in Q[Y]$ durch $f(Y) = Y^p - X$ gegeben.

   (a) Zeige, dass f in $Q[Y]$ irreduzibel ist.

   (b) Es sei u eine Nullstelle von f in einem Erweiterungskörper von Q.
   Bestimme Grad und reduzierten Grad von u über Q. (4 Punkte)

4. Es sei der Ring der $(2, 2)$- Matrizen über dem Körper $\mathbb{C}$ gegeben.
   Wir betrachten die Teilmenge der Hamilton-Quaternionen

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} w & z \\ -\overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix} : w, z \in \mathbb{C} \right\},$$

   welche einen reellen Vektorraum der Dimension 4 darstellen.
   Zeige:

   (a) Bezüglich der Matrizenaddition und -multiplikation ist $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper.

   Hinweis:
   Bei einem Schiefkörper wird die Kommutativität der Multiplikation nicht gefordert.

   (b) Mit den speziellen Quaternionen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

   ist durch die Menge $\{A, B, C, D\}$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{H}$ über $\mathbb{R}$ gegeben.

   (c) Die Menge $Q = \{\pm A, \pm B, \pm C, \pm D\}$ bildet bezüglich der Matrizenmultiplikation eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 8.

   (d) Alle nichttrivialen Untergruppen von Q sind durch $\langle -A \rangle$, $\langle B \rangle$, $\langle C \rangle$ und $\langle D \rangle$ gegeben.

   (e) Alle Untergruppen aus Teilaufgabe d) sind Normalteiler. (10 Punkte)