ulm university universität ulm

Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte, davon sechs Zusatzpunkte
Abgabe: Donnerstag, 12. Januar 2017, vor den Übungen

1. Es seien die Polynome $p(X) = X^2 + 2X + 2$ und $q(X) = X^4 + X + 1$ gegeben.
   (a) Zeige, dass p über $\mathbb{F}_3$ und q über $\mathbb{F}_2$ irreduzibel sind.
   (b) Konstruiere mit Hilfe dieser Polynome einen Körper der Ordnung neun bzw. 16 und gib die Elemente jeweils an.
   (c) Stelle die multiplikative Verknüpfungstafel des Körpers mit neun Elementen auf. (8 Punkte)
2. Es seien die Polynome $f(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ und $g(Y) = f(X)$ mit $X = Y - \frac{a_2}{3}$ gegeben. Zeige, dass f und g dieselbe Diskriminante haben. (4 Punkte)
3. Bestimme für jedes der folgenden Polynome, ob es sich um eine symmetrische Funktion handelt und drücke sie gegebenenfalls durch die elementarsymmetrischen Funktionen aus.
   (a) $u_1^2u_2 + u_2^2u_1$ für $n = 2$
   (b) $u_1^2u_2 + u_2^2u_3 + u_3^2u_1$ für $n = 3$
   (c) $(u_1 + u_2)(u_2 + u_3)(u_1 + u_3)$ für $n = 3$ (6 Punkte)
4. Es sei $\mu = (1 + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.
   (a) Bestimme das Minimalpolynom von $\sqrt{\mu}$ über $\mathbb{Q}$.
   (b) Zeige, dass der Körper $K := \mathbb{Q}(\sqrt{\mu})$ über $\mathbb{Q}$ Galoissch ist.
   (c) Beweise, dass die Galoisgruppe $G(K/\mathbb{Q})$ zur Quaternionengruppe Q isomorph ist.
   (d) Bestimme alle Zwischenkörper von $K/\mathbb{Q}$.
   (e) Zeige $Q \not\cong D_4$, wobei D_4 die Symmetriegruppe des Quadrats ist. (12 Punkte)

Wir wünschen Euch allen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr 2017!