Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2016
22.04.2016
Blatt 02

Übungen zu Analysis I

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Freitag, den 29.04.2016 vor den Übungen)

1. Es seien $a, b, x \in \mathbb{R}$. Zeige folgende Implikationen oder widerlege sie mit einem Gegenbeispiel.
   (a) $|x - a| < b \implies x > a - 2b$,
   (b) $(ab > 1) \wedge (a < 1) \implies b > 1$,

(2 + 2 Punkte)

2. Betrachte folgende Mengen:

$$T_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1 \text{ oder } 2 < x < 3\},$$
$$T_2 := T_1 \cup \{1\} \cup \{4\},$$
$$T_3 := \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Bestimme jeweils Infimum und Supremum und begründe ob ein Minimum oder Maximum existiert.

(2 + 1 + 2 Punkte)

3. Zeige folgende Behauptungen mit vollständiger Induktion.
   (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
   (b) Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $\frac{1}{\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.
   Hinweis: Zeige zunächst, dass $0 \leq x < y \implies \sqrt{x} < \sqrt{y}$ gilt.
   (c) Es seien $a_i \geq 0$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann

$$(1 + a_1) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + \ldots + a_n$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
   (d) Finde den Fehler in folgendem Induktionsbeweis.
   Behauptung: Alle Gerichte in der Mensa schmecken gleich.
   Beweis: Idealisierend gehen wir von einer Mensa aus, die beliebig viele verschiedene Gerichte anbieten kann. Wir bezeichnen die verschiedenen Gerichte mit $G_1, G_2, \ldots, G_n$ (wobei $n \in \mathbb{N}$). Es ist also zu zeigen, dass der Geschmack von $G_1, G_2, \ldots, G_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ übereinstimmt.
   - Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen.
   - Induktionshypothese: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
   - Induktionsschritt: Wir betrachten die Gerichte $G_1, \ldots, G_{n+1}$. Gemäß der Induktionshypothese schmecken die Gerichte $G_1, \ldots, G_n$ gleich. Ebenso schmecken die Gerichte $G_2, \ldots, G_{n+1}$ gleich, da es sich um n Gerichte handelt. Damit haben insbesondere die Gerichte G_{n+1} und G_n denselben Geschmack. Also ist der Geschmack aller $n + 1$ Gerichte identisch.

(3 + 3 + 3 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Es sei $M := \{x \mid \exists n \in \mathbb{N} : x = 2n\}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen.

   (a) Zeige, dass M und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind (bzw. dass M abzählbar unendlich ist).

   (b) Finde eine surjektive Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ und zeige deren Surjektivität.

   (c) Finde eine injektive Funktion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ und zeige deren Injektivität.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Die Aufgaben dürfen in Gruppen bearbeitet werden, aber jede Person sollte ihre Lösung selbst und in eigenen Worten aufschreiben. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

https://www.uni-ulm.de/?id=74932