Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2016
06.05.2016
Blatt 04

Übungen zu Analysis I

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Freitag, den 13.05.2016 vor den Übungen)

1. Nachstehende Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Es sei $\varepsilon > 0$. Bestimme jeweils $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

   (a) $a_n := \dfrac{n!}{n^n}$.

   (b) $a_n := \dfrac{n^3 + 2n^2 - 10}{2n^3 + 10}$.

   (2 + 2 Punkte)

2. Untersuche nachstehende Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

   (a) $a_n := \dfrac{2^n + (-3)^n}{(-2)^n + 3^n}$.

   (b) $a_n := \sqrt{n^2 + n} - n$.

   (c) $a_n := \dfrac{2n^3 + 10}{n^2 + 2n - 10}$.

   (2 + 2 + 2 Punkte)

3. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte reelle Folgen.

   (a) Zeige, dass dann auch die Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $c_n := a_n + b_n$ und $d_n := a_n b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, beschränkt sind.

   (b) Zeige außerdem (durch zwei Beispiele), dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit

   $$x_n := \begin{cases} \frac{a_n}{b_n} & \text{falls } b_n \neq 0 \\ \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$$

   sowohl beschränkt als auch unbeschränkt sein kann.

   (c) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeige, dass dann auch die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Teilaufgabe (a) eine Nullfolge ist.

   (d) Es existiere ein $c > 0$, so dass $|b_n| \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Teilaufgabe (a) sei eine Nullfolge. Zeige, dass dann die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein muss.

   (e) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeige, dass dann $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + a_n} = 1$ gilt.

   (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Beweise folgende Aussagen aus der Vorlesung:

   (a) Die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist monoton fallend.
   Hinweis: Zeige, dass $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+2)} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

   (b) Es gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} < 3$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2 + 2 Punkte)

Die Aufgaben dürfen in Gruppen bearbeitet werden, aber jede Person sollte ihre Lösung selbst und in eigenen Worten aufschreiben. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.