Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2016
13.05.2016
Blatt 05

Übungen zu Analysis I

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Freitag, den 20.05.2016 vor den Übungen)

1. Beweise Lemma 2.6 aus der Vorlesung. Zeige also, dass für $a, b > 0$ und für $x, y \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

   (a) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$.

   (b) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

   (c) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

   Gib bei jeder Umformung an, welche Definition oder welcher Satz verwendet wurde (Körperaxiome können ohne Begründung verwendet werden).

   (1 + 1 + 1 Punkte)

2. Zeige, dass folgende rekursiv definierte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergieren und bestimme den Grenzwert.

   (a) $a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n := \frac{2a_{n-1}+1}{3}$ für $n \in \mathbb{N}$.

   (b) $0 < a_0 < 1$ und $a_n := 1 - \sqrt{1 - a_{n-1}}$ für $n \in \mathbb{N}$.
   Hinweis: Zeige zunächst, dass $0 < a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Es darf $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 - a_n} = \sqrt{1 - \lim_{n\to\infty} a_n}$ ohne Beweis verwendet werden.

   (2 + 2 Punkte)

3. Bestimme jeweils alle Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

   (a) $x_n := \left(\frac{i\sqrt{3}-1}{2}\right)^n$.

   (b) $x_n := n^{42} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$.

   (2 + 2 Punkte)

4. Bestimme $\limsup_{n\to\infty} x_n$ und $\liminf_{n\to\infty} x_n$ mit

   (a) $x_n := \big(1 + (-1)^n\big)(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

   (b) $x_n := \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)^{3n}$.

   (2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

5. Zeige oder widerlege jeweils, dass eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ existiert, so dass für die Menge T der Häufungspunkte dieser Folge folgendes gilt:

   (a) $T = \{0, \infty\}$.

   (b) $T = \mathbb{N}$.

   (c) $T = \mathbb{Q}$.

   (d) $T = \mathbb{R}$.

(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

6. Es sei $q \in [0, 1)$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ sei eine komplexe Folge, so dass

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert.

(3 Punkte)

Die Aufgaben dürfen in Gruppen bearbeitet werden, aber jede Person sollte ihre Lösung selbst und in eigenen Worten aufschreiben. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.