Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2016
20.05.2016
Blatt 06

# Übungen zu Analysis I

48 Punkte entsprechen 100%;
Abgabe der Aufgaben 1–4 spätestens am Montag, den 30.05.16, 10:00h–10:15h vor H12;
Abgabe der Aufgaben 5–8 spätestens am Freitag, den 03.06.2016 vor den Übungen;
Die Übung am 27.05.16 entfällt.

1. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexe Folgen. Zeige oder widerlege folgende Behauptungen:

   (a) Falls die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$.

   (b) Falls $\sum_{k=1}^\infty a_k$ und $\sum_{k=1}^\infty b_k$ divergieren, dann divergiert auch $\sum_{k=1}^\infty (a_k + b_k)$.

   (2 + 2 Punkte)

2. (a) Zeige, dass $\mathrm{e}\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k \leq k! \leq k\,\mathrm{e}\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

   (b) Zeige, dass $(k!)^{-\frac{1}{k}} \to 0$ für $k \to \infty$ gilt.

   (3 + 1 Punkte)

3. Beweise folgende Erweiterung des Satzes von Mertens (Satz 2.15): Falls die Reihen $\sum_{k=0}^\infty a_k$ und $\sum_{k=0}^\infty b_k$ absolut konvergent sind, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^\infty c_k$, mit $c_k := \sum_{\nu=0}^k a_\nu b_{k-\nu}$ für $k \in \mathbb{N}$, absolut.

   (3 Punkte)

4. Bestimme, welche der folgenden Reihen konvergieren und ob es sich um absolute Konvergenz handelt. Begründe jeweils Deine Aussage.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^k$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=3}^\infty \frac{\mathrm{e}}{\ln(k)}$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

   (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{2k}{4+k}\right)^{2k}$

   (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty k^\alpha q^k$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $q \in (0,1)$.

   (2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

*Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.*

5. Bestimme für folgende Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jeweils $\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$. Gib außerdem an, ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert und begründe dies.

   (a) $a_k := \dfrac{k}{k^2+1}$.

   (b) $a_k := \begin{cases} 2^{-k} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 3^{-k} & \text{sonst.} \end{cases}$

(2 + 2 Punkte)

6. Betrachte $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, wobei $c_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ wie beim Cauchy-Produkt von absolut konvergenten Reihen gilt.

   (a) Es sei
   $$a_k := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} =: b_k$$
   für $k \in \mathbb{N}$ und $a_0 := 0 =: b_0$. Zeige dass dann $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren, aber nicht absolut. Zeige außerdem, dass $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ divergiert.

   (b) Es sei $a_k := 3^k, b_k := 2^k$ für $k \in \mathbb{N}$ und $a_0 := 3$ sowie $b_0 := -2$. Zeige, dass dann $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergieren. Zeige außerdem, dass $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert.

   *Hinweis*: Zeige bei (a) zunächst, dass $\frac{1}{\sqrt{j(k-j)}} \geq \frac{2}{k}$ für alle $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ gilt.

(3 + 3 Punkte)

7. Bestimme jeweils den Konvergenzradius $R$ der folgenden Potenzreihen:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $a_k := \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ k-2 & \text{sonst.} \end{cases}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k!(x-\mathrm{e})^k$ für $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ für $z \in \mathbb{C}$. Bestimme außerdem das Konvergenzverhalten für $|z| = R$.

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k}$ für $z \in \mathbb{C}$. Bestimme außerdem das Konvergenzverhalten für $|z| = R$.

(2 + 2 + 3 + 3 Punkte)

8. (a) Zeige, dass
   $$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{|z|^k}{(k-2)!}$$
   für alle $z \in \mathbb{C}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt.

   (b) Zeige, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(3 + 2 Punkte)

Die Aufgaben dürfen in Gruppen bearbeitet werden, aber jede Person sollte ihre Lösung selbst und in eigenen Worten aufschreiben. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

https://www.uni-ulm.de/?id=74932