Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2016
10.06.2016
Blatt 08

Übungen zu Analysis I

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Freitag, den 17.06.2016 vor den Übungen)

1. Begründe für jede der folgenden Funktionen, ob sie stetig ist oder nicht. Im Fall der Stetigkeit, begründe zusätzlich, ob gleichmäßige Stetigkeit vorliegt. Begründe im Fall der Unstetigkeit, ob es sich um eine hebbare Unstetigkeitsstelle, um eine Sprungstelle, oder um eine Oszillationsstelle handelt.

   (a) $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{\exp x}{\log\left|\frac{1}{x}\right|+1} & \text{sonst} \end{cases}$.

   (b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ \cos\Big(\exp\big(\frac{1}{x^2}\big)\Big) & \text{sonst} \end{cases}$.

   (c) $f\colon \big(\frac{1}{2}, \mathrm{e}\big) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{falls } x \le 1 \\ x^2 & \text{sonst} \end{cases}$.

   (d) $f\colon \big(0, \pi\big) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{falls } x \le 1 \\ x^2 & \text{sonst} \end{cases}$.

   (e) $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{\sin x}{|x|} & \text{sonst} \end{cases}$.

(2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

2. Stelle die komplexen Zahlen $z_1 := 1 + i$, $z_2 := 1 - \sqrt{3}i$ und $z_3 := -\frac{\pi}{2}$ in Polarkoordinaten dar. Gib also für jedes $j \in \{1, 2, 3\}$ ein $r_j \ge 0$ und ein $\varphi_j \in (-\pi, \pi]$ an, so dass $z_j = r_j\, \mathrm{e}^{i\varphi_j}$ gilt.

(3 Punkte)

3. (a) Zeige, dass für jedes $y \in [-1, 1]$ eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass $x_k \to 0$ und $\sin\big(\frac{1}{x_k}\big) \to y$ für $k \to \infty$ gilt.

   (b) Zeige, dass $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.

   Hinweis: Zeige zunächst, dass $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(2 + 2 Punkte)

4. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ sei gleichmäßig stetig.

   (a) Zeige, dass $\big|f(x)\big|$ für $x \in (a, b)$ beschränkt ist.

   (b) Zeige, dass eine Funktion $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ existiert, die stetig und $\big|g(x)\big|$ für $x \in (a, b)$ unbeschränkt ist.

(3 + 1 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

5. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Abbildung $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn ein $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\forall x_1, x_2 \in I : \big|f(x_1) - f(x_2)\big| \leq L|x_1 - x_2|$$

gilt.

(a) Zeige, dass jede Lipschitz-stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auch gleichmäßig stetig ist.

(b) Zeige, dass die Ableitung einer differenzierbaren, Lipschitz-stetigen Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

(c) Zeige, dass aus Lipschitz-Stetigkeit nicht Differenzierbarkeit folgt. Zeige also, dass eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ existiert, die Lipschitz-stetig, aber nicht differenzierbar ist.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Die Aufgaben dürfen in Gruppen bearbeitet werden, aber jede Person sollte ihre Lösung selbst und in eigenen Worten aufschreiben. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.