

Übungen zu Analysis I

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Freitag, den 24.06.2016 vor den Übungen)

1. (a) Es sei $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{2x} \sqrt{x}}{3x^2 + 1}$. Bestimme $f'(x)$.
- (b) Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + \left(\frac{5x}{3}\right)^3$. Zeige, dass die Umkehrfunktion $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert und auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist. Bestimme dann $(f^{-1})'(1)$.
- (c) Es seien $a > 0$, $a \neq 1$ und $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \log_a(x) - \log_a(e^x)$. Bestimme $f'(x)$.
- (1 + 2 + 1 Punkte)

2. Bestimme jeweils die Extremwerte der folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich.

(a) $f: \left[-\frac{5}{2}, 3\right] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{3}{5}x^5 - 4x^3 + 7$.

(b) $f: [1, e) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = -(\log(x))^e$. (3 + 3 Punkte)

3. (a) Zeige, dass eine Umkehrfunktion von $\coth: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert und leite ihren Definitionsbereich her.

(b) Bestimme die Ableitung der in Teilaufgabe (a) hergeleiteten Umkehrfunktion Arcoth .

(2 + 1 Punkte)

4. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Zeige, dass eine differenzierbare Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, deren Ableitung beschränkt ist, auch Lipschitz-stetig ist. (3 Punkte)

5. Es sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

(a) Zeige, dass $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ gilt.

(b) Zeige, dass $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^k (2j-1)}{\prod_{j=1}^k (2j)} x^{2k}$ gilt.

(c) Zeige, dass $\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^k (2j-1)}{\prod_{j=1}^k (2j)} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ gilt. (2 + 3 + 3 Punkte)

In the fall of 1972 President Nixon announced that the rate of increase of inflation was decreasing. This was the first time a sitting president used the third derivative to advance his case for reelection.

Hugo Rossi, 1996, *Mathematics is an Edifice, Not a Toolbox*,
Notices of the American Mathematical Society 43 (10): 1108
<http://www.ams.org/notices/199610/page2.pdf>

Die Aufgaben dürfen in Gruppen bearbeitet werden, aber jede Person sollte ihre Lösung selbst und in eigenen Worten aufschreiben. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

<https://www.uni-ulm.de/?id=74932>