Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2016
24.06.2016
Blatt 10

Übungen zu Analysis I

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Freitag, den 01.07.2016 vor den Übungen)

1. Bestimme folgende Grenzwerte, sofern sie existieren. Begründe andernfalls, weshalb sie nicht existieren.

   (a) $\lim_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

   (b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{\log x}$.

   (c) $\lim_{x\to 0+} \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

   (2 + 2 + 2 Punkte)

2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := -2x^4 + 3x^3 - 6x + 5$, bestimme jeweils das zweite, vierte und fünfte Taylorpolynom von f in $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$. Dabei ist das n-te Taylorpolynom als $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$ definiert.

   (6 Punkte)

3. Bestimme alle lokalen und globalen Extremwerte von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \exp\left(-3x^5 + 20x^3\right)$.

   (3 Punkte)

4. *Schlömilch'sches Restglied.* Es sei $f \in C^{n+1}(I)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Es seien $x, x_0 \in I$ mit $x_0 < x$, $p \in \mathbb{N}$ mit $p \leq n + 1$. Außerdem sind die Funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(t) := (x - t)^p$ und $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $G(t) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!}$ gegeben.

   (a) Zeige, dass ein $\xi \in (x_0, x)$ existiert, so dass
   $$\frac{G(x_0) - G(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{1}{p(x-\xi)^{p-1}} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(f^{(k+1)}(\xi)(x-\xi)^k - f^{(k)}(\xi) k (x-\xi)^{k-1} \right)$$
   gilt.

   (b) Folgere aus der vorherigen Teilaufgabe, dass ein $\xi \in (x_0, x)$ existiert, so dass
   $$G(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x-\xi)^{n+1-p}(x - x_0)^p$$
   gilt.

   (c) Betrachte nun $I := (-1, 1)$ und $f(x) := \log(1 - x)$ für $x \in I$. Es sei $x_0 = 0$ und $1 \leq p \leq n$. Zeige, dass $|R_n(x)| \to 0$ für $n \to \infty$ und für alle $x \in I$ gilt, wobei $R_n(x) := G(x_0)$ das sogenannte Schlömilch'sche Restglied ist.

   (3 + 3 + 3 Punkte)

Die Aufgaben dürfen in Gruppen bearbeitet werden, aber jede Person sollte ihre Lösung selbst und in eigenen Worten aufschreiben. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

https://www.uni-ulm.de/?id=74932