Prof. Dr. U. Stadtmüller
I. Lecei

Sommer 2016
25.04.2016
Blatt 2

Übungen zu Angewandte Statistik

(Abgabe am Montag, den 02.05.2016, 12:15h)
(12 Punkte entsprechen 100%)

1. Es sei $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_{\mu,C}$, wobei $\mu \in \mathbb{R}^2$ und $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix ist.

   (a) Beweise die folgenden Aussagen:
   - $\mid \rho \mid = 1 \Longleftrightarrow rang(C) = 1$, wobei ρ der Korrelationskoeffizient von X_1 und X_2 ist.
   - X_1 und X_2 sind unabhängig $\Longleftrightarrow c_{12} = c_{21} = 0$

   (b) Sei nun $\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$. Zeige, dass $Y_1 := X_1 - X_2$ und $Y_2 := X_1 + X_2$ unabhängig sind und dass $Y_1 \sim N_{0,1}$, $Y_2 \sim N_{0,3}$ gilt.

   (c) Bestimme K, sodass $KX \sim N_{0,I_2}$, wobei I_2 die Einheitsmatrix ist.

   (2 + 2 + 2 Punkte)

2. Es sei X multivariat normalverteilt mit Kovarianzmatrix $C_\rho = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ und Erwartungswertvektor $\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Plotte in einer Grafik vier mal die Dichte der 2-dimensionalen Normalverteilung mit Erwartungswertvektor μ und Kovarianzmatrix C_ρ für $\rho \in \{0, 0.4, 0.8, -0.8\}$. Lade dazu das Package `mnormt` herunter und benutze die Funktion `dmnorm` (die Hilfefunktion ist wie immer nützlich).

   (4 Punkte)

3. Es sei $Y \sim \chi^2_r$. Zeige, dass

   (a) $E(Y) = r$, $Var(Y) = 2r$.

   (b) $E(Y^k) = 2^k \left((k-1) + \frac{r}{2}\right) \cdot ... \cdot (1 + \frac{r}{2}) \cdot \frac{r}{2} \; \forall k \in \mathbb{N}$. (*Zusatzaufgabe*)

   Hinweis: Für die Gammafunktion gilt $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$

   (2 + 2 Punkte)