Prof. Dr. U. Stadtmüller
I. Lecei

Sommer 2016
02.05.2016
Blatt 3

Übungen zu Angewandte Statistik

(Abgabe am Montag, den 09.05.2016, 12:15h)

1. Zeige die folgenden Aussagen:

   (a) Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gilt
   $$Spur(AB) = Spur(BA).$$

   (b) Sei $Y = X^T AX$ mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und einem beliebigen Zufallsvektor X mit Erwartungswertvektor μ und Kovarianzmatrix C. Dann gilt
   $$E(Y) = \mu^T A\mu + Spur(AC).$$

   (c) Sei $X \sim N_{\mu,C}$ mit einer positiv semidefiniten Matrix $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Dann gilt
   $$X^T C^{-1} X \sim \chi^2_{d,\delta^2},$$
   wobei $\delta^2 = \mu^T C^{-1}\mu$.

(1 + 3 + 2 Punkte)

2. Es sei $X \sim N\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, I_2\right)$.

   (a) Erzeuge 1000 Realisierungen von X.

   (b) Sei $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix}$. Erzeuge 1000 Realisierungen von $Y = X^T AX$.

   (c) Wie ist Y von Teil b) verteilt? Plotte ein Histogramm von den Realisierungen von Y zusammen mit der theoretischen Dichte f_Y.

   (d) Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$, $Z = X^T BX$. Wie ist die gemeinsame Verteilung von (Y, Z) ?

(1 + 1 + 3 + 1 Punkte)