Prof. Dr. U. Stadtmüller
I. Lecei

Sommer 2016
09.05.2016
Blatt 4

Übungen zu Angewandte Statistik

(Abgabe am Montag, den 16.05.2016, 12:15h)

1. Lade den Datensatz data4.dat von der Homepage herunter. Er enthält die Werte $X_1, ..., X_n$ eines linearen Modells der Form $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 \sin(X_i) + \varepsilon_i$.

   (a) Lies den Datensatz ein.

   (b) Erzeuge die Designmatrix A des linearen Modells.

   (c) Erzeuge $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)^T \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ mit $\sigma = 0.05$.

   (d) Erzeuge $Y = (Y_1, ...Y_n)^T$ mit ε und A von den vorherigen Teilaufgaben, sowie mit $\beta = (0.4, 0.1, -0.5)^T$.

   (e) Erstelle einen Plot, der die Punkte (X_i, Y_i), sowie die Kurve $f(x) = 0.4 + 0.1x - 0.5\sin(x)$ enthält.

   (5 Punkte)

2. Sofern es sich bei den folgenden Modellen um lineare Modelle der Form $X = A\beta + \varepsilon$ handelt, gib die Designmatrix an. Begründe andernfalls warum es sich nicht um ein lineares Modell handelt.

   (a) $X_i^{(1)} = e^{\beta_0} e^{\beta_1 t_i^2} \varepsilon_i$, $\varepsilon_i > 0$.

   (b) $\log X_i^{(1)}$.

   (c) $X_i^{(2)} = e^{\beta_0} + e^{\beta_1 t_i^2} + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i > 0$

   (d) $\log X_i^{(2)}$.

   (2 Punkte)

3. Es sei $\overrightarrow{X} \sim N_{A\overrightarrow{\beta}, \sigma^2 I_n}$. Zeige, dass die Likelihoodfunktion von $\overrightarrow{X}$ gegeben ist durch

$$L(\overrightarrow{x}; \overrightarrow{\beta}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\overrightarrow{x} - A\overrightarrow{\beta}\right)^T \left(\overrightarrow{x} - A\overrightarrow{\beta}\right)\right\}.$$

   Zeige außerdem, dass die ML-Schätzer für $\overrightarrow{\beta}$ und σ^2, bezeichnet mit $\widehat{\overrightarrow{\beta}}$ und $\widehat{\sigma^2}$, mit den LS-Schätzern übereinstimmen, also dass

$$\widehat{\overrightarrow{\beta}} = argmin \parallel \overrightarrow{X} - A\overrightarrow{\beta} \parallel^2$$

   und

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \parallel \overrightarrow{X} - A\widehat{\overrightarrow{\beta}} \parallel^2$$

   gilt.

   (5 Punkte)