Prof. Dr. U. Stadtmüller Sommer 2016
I. Lecei 23.05.2016
Blatt 6

Übungen zu Angewandte Statistik

(Abgabe am Montag, den 30.05.2016, 12:15h)

1. Betrachte das lineare Modell $\overrightarrow{X} = A\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\varepsilon}\ \overrightarrow{\varepsilon} \sim N(0, I_n)$.

   (a) Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $rang(A) = r < n$. Zeige, dass $\overrightarrow{g}^T\overrightarrow{\beta}$ für alle $g \in \mathbb{R}^r$ schätzbar ist.

   (b) Sei nun $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Sind $\beta_1 - \beta_2$ und $\beta_1 - \beta_3$ jeweils schätzbar?

   (c) Sei $\widehat{\overrightarrow{\beta}} = (A^TA)^{-1}A^TX$, also der ML-Schätzer für $\overrightarrow{\beta}$. Bestimme die Verteilung von

   $$\widehat{\overrightarrow{\varepsilon}} = X - A\widehat{\overrightarrow{\beta}}.$$

(6 Punkte)

2. Der Zufallsvektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ sei multivariat normalverteilt mit Erwartungswertvektor $\begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}$ und Kovarianmatrix $\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \varrho\sigma_x\sigma_y \\ \varrho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$. Zeige, dass die bedingte Dichte $f_{Y|X=x}(y)$ der Dichte der Normalverteilung mit den Parametern $\left(\mu_y + \varrho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x), \sigma_y^2(1 - \varrho^2)\right)$ entspricht.

(6 Punkte)