Lineare Optimierung und Differentialgleichungen

Vorlesungsbegleiter

Dr. Karin Stadtmüller

Kapitel 0

Historische und thematische Einführung in Operations Research (OR)

Der Begriff des Operations Research entstand in den 40er Jahren des 20. Jahrhunderts (genauer zu Beginn des 2. Weltkriegs) aus Untersuchungen von Mathematikern, Technikern und Militärexperten in England und den USA zur Verbesserung der Wirksamkeit militärischer Operationen (z.B. Zusammenstellung und Streckenführung von Schiffkonvois, Radartechnik, U-Boot-Bekämpfung u.a.). Der dafür geprägte Begriff des OR wurde auch für den zivilen Bereich übernommen, in dem die Entwicklung im Wesentlichen vorangetrieben wurde.
Namen von Wissenschaftlern, die wesentliche Forschungsbeiträge zum OR geliefert haben, sind:

- L. W. Kantorowitsch und F.C. Koopmans: Pioniere der Linearen Optimierung; Nobelpreis für WiWi 1975 für ihre Beiträge zur Theorie der optimalen Ressourcenverwendung. Arbeiten z.B. über „Beste Auslastung von Maschinen“, „Zuschnitte mit geringstem Abfall“, „Optimale Verteilung von Gütern für den Transport“
- F. L. Hitchcock: erste Arbeiten zum Transportproblem
- G. B. Dantzig: Simplexverfahren (generelles Lösungsverfahren für Lineare Optimierungsprobleme)
- J. v. Neumann / O. Morgenstern: Begründer der Spieltheorie

Je nach Typ des zugrunde liegenden Optimierungsmodells wird OR in folgende Gebiete unterteilt:

- Lineare Optimierung
  - lineare Zielfunktionen, lineare Nebenbedingungen
  - größte Bedeutung im Bereich der Fertigungstechnik (Produktionsprogramm, Mischungs-, Verschnitt-, Transportoptimierung)

  - Lösungsmethode: Simplex-Algorithmus

- Graphentheorie und Netzplantechnik
  - graphische Veranschaulichung von Organisationsstrukturen und Projektabläufen
  - Modelle und Verfahren zur Bestimmung
    ∗ kürzester Wege
    ∗ maximaler / minimaler Flüsse in Graphen (z.B. Versorgungsleitungen)
    ∗ Netzplantechnik: Methode der Planung; dient (zugleich) der Überwachung und Kontrolle von betrieblichen Abläufen und Projekten

- Ganzzahlige (lin.) und kombinatorische Optimierung
  - Variablen dürfen nur ganze Zahlen oder Binärzahlen (0/1) annehmen
  - Anwendung:
    ∗ Investitionsprogrammplanung
    ∗ Zuordnungsprobleme (Maschinen auf Plätze mit Ziel: kostenminimaler Transport zwischen den Fertigungsplätzen)
    ∗ Reihenfolgeprobleme (z.B. Bearbeitungsreihenfolge von Aufträgen)
    ∗ Gruppierungsproblem (z.B. Zusammenfassung ähnlicher Kundengruppen)

- Dynamische Optimierung
  - Modell besteht aus einzelnen Stufen (z.B. Zeitabschnitte)
  - Gesamtoptimierung wird durch stufenweise rekursive Optimierung ersetzt
  - Anwendung:
    ∗ Bestellmengen
    ∗ Losgrößenplanung
    ∗ Investitionsplanung

- Nichtlineare Optimierung
  - Zielfunktion und/oder Nebenbedingungen sind nichtlinear (speziell: sog. konvexe Optimierung)

- Warteschlangentheorie
  - untersucht Abfertigungssteuerung von Service- und Bedienungsstationen (z.B. Bankschalter, Maschinen, vor denen sich Aufträge stauen)

- Simulation
  - Untersuchung („Durchspielen") einzelner Alternativen bzw. Systemvarianten im Rahmen komplexer stochastischer (Optim.-) Modelle
  - Anwendungen:
    * Warteschlangensystem
    * Auswertung stochastischer Netzpläne
    * Analyse von Lagerhaltungs- und Materialflusssystemen

Kapitel 1

Lineare Optimierung

1.1 Beispiele linearer Optimierungsprobleme

Es sollen zunächst einige Beispiele typischer linearer Optimierungsprobleme dargestellt werden.

Beispiel 1.1 (Produktionsproblem: Beispiel P)
Zwei Produkte I und II sollen unter Verwendung der Produktionsfaktoren A, B und C hergestellt werden. Verfahrensbedingt müssen gewisse Kapazitäten eingehalten werden; bekannt sind der Faktoreinsatz und der Gewinn (für 1 Stück).

	I	II	Kapazität
A	2	10	60
B	6	6	60
C	10	5	85
Gewinn	45	30	

Wie viele Stücke sollen von jedem Produkt hergestellt werden, um einen möglichst großen Gewinn zu erzielen?

Seien x_1 und x_2 die Anzahl der Stücke von Produkt I bzw. II. Dann lautet das mathematische Optimierungsproblem:

$$
\begin{aligned}
& 45x_1 + 30x_2 \to \max \\
\text{unter NB:}\quad & 2x_1 + 10x_2 \le 60 \\
& 6x_1 + 6x_2 \le 60 \\
& 10x_1 + 5x_2 \le 85 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Als optimale Lösung ergibt sich leicht $x_1^* = 7$ und $x_2^* = 3$. Der maximale Gewinn ist 405.

Beispiel 1.2 (Diät- oder Mischungsproblem)
Es soll ein „alkoholisches Getränk" aus drei Flüssigkeiten A, B und C hergestellt werden. Für das Getränk bestehen Beschränkungen bzgl. seines Gehalts an Alkohol, Aromastoffen und Zucker. Die Zutaten dürfen ferner nicht beliebig gemischt werden.

				Gehalt	
	A	B	C	minimal	maximal
Alkohol	9	14	0	7	12
Aromastoffe	1	8	0	3	-
Zucker	3	7	20	3	6
A	1	0	0	0.4	-
B	0	1	0	-	0.5
C	0	0	1	-	0.6
Preis	5	2	0.25		

Wie kann man aus den Flüssigleiten A, B, und C ein möglichst kostengünstiges alkoholisches Getränk herstellen, das die angegebenen Mindest- und Höchstbestandteile enthält?

Seien x_1, x_2 und x_3 die von den Flüssigkeiten A, B und C zu benutzenden Mengen. Dann lautet das mathematische Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcl}
 & & & 5x_1 + 2x_2 + 0.25x_3 \rightarrow \min \\
\text{unter NB:} & 7 & \leq & 9x_1 + 14x_2 \leq 12 \\
 & 3 & \leq & x_1 + 8x_2 \\
 & 3 & \leq & 3x_1 + 7x_2 + 20x_3 \leq 6 \\
 & 0.4 & \leq & x_1 \\
 & & & x_2 \leq 0.5 \\
 & & & x_3 \leq 0.6 \\
 & & & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
 & & & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0
\end{array}$$

Einige der Ungleichungen sind redundant!

Entsprechend diesem speziellen Mischungsproblem ergibt sich das allgemeine Mischungs- oder Diätproblem:
Gegeben seien die Nahrungsmittel $N_1, N_2, \ldots, N_n$. Jedes Nahrungsmittel enthalte m verschiedene Grundsubstanzen $G_1, G_2, \ldots, G_m$, und zwar enthalte 1 kg des Nahrungsmittels N_j $(1 \leq j \leq n)$ a_{ij} Gramm der Grundsubstanz G_i $(1 \leq i \leq m)$. 1 kg des Nahrungsmittels N_j koste c_j € $(1 \leq j \leq n)$. Es wird verlangt, dass

jedes „Menü“ von der Grundsubstanz G_i mindestens b_i Gramm enthalten soll $(1 \leq i \leq m)$.
Bezeichne x_j den Anteil des Nahrungsmittels N_j an einem „Menü“ $(1 \leq j \leq n)$ und

$$x = (x_1, \dots, x_n),\ b = (b_1, \dots, b_m),\ c = (c_1, \dots, c_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dann ergibt sich das allgemeine Mischungsproblem zu

$$\begin{aligned} & c^\top x \to \min \\ \text{unter NB:} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0,\ \sum_i x_i = 1 \end{aligned}$$

Beispiel 1.3 (Transportproblem)
Die Raffinerien $R_1, \dots, R_m$ einer Ölgesellschaft beliefern die Tanklager $T_1, \dots, T_n$ unter folgenden Bedingungen: Die Raffinerie R_i kann höchstens a_i Einheiten eines bestimmten Produkts (z.B. Heizöl, Benzin) liefern $(1 \leq i \leq m)$; das Tanklager T_j benötigt mindestens b_j Einheiten $(1 \leq j \leq n)$. Der Transport von R_i nach T_j kostet c_{ij} € pro Einheit.

Sei x_{ij} die von R_i nach T_j zu transportierende Menge. Sollen die Gesamttransportkosten minimiert werden, dann lautet die Aufgabe: (i: Raffinerien, j: Tanklager)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \\ \text{unter NB:} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad 1 \leq i \leq m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \quad 1 \leq j \leq n \\ & x_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

Ein zulässiger Transportplan existiert, falls gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Beispiel 1.4 (Matrixspiele)
Sei A eine (m, n)-Matrix, die sog. Auszahlungsmatrix eines 2-Personen-Nullsummen-Spiels. Zwei Spieler S_1 und S_2 wählen gleichzeitig eine Zahl $i \in \{1, \ldots, m\}$ bzw. $j \in \{1, \ldots, n\}$ und S_2 hat dann einen gewissen Betrag a_{ij} an S_1 zu zahlen. Eine Strategie von S_2 ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq n$ (x_j gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der S_2 die Zahl j wählt). Der Spieler S_2 ist bestrebt, seinen erwarteten Verlust v möglichst klein zu halten (unabhängig davon, wie S_1 spielt).

Die Optimierungsaufgabe lautet dann:

$$\begin{aligned} & v \to \min \\ \text{unter NB:}\quad & Ax \leq ve, \quad e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\ & v \in \mathbb{R},\ x_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

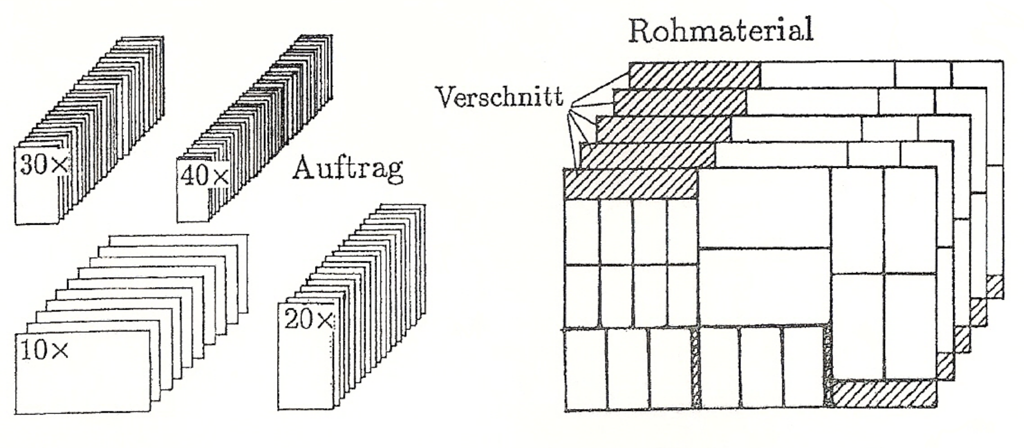
Das minimale v heißt Wert des Spiels.

Ist A eine positive Matrix (dann ist $v > 0$), so führt die Variablentransformation $z = \frac{1}{v}x$ zu dem äquivalenten linearen Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} z_j \to \max \\ \text{unter NB:}\quad & Az \leq e \\ & z \geq 0. \end{aligned}$$

(Beispiele 1.2-1.4 Quelle: Rieder Vorlesungsskript)

Beispiel 1.5 (Verschnittproblem)



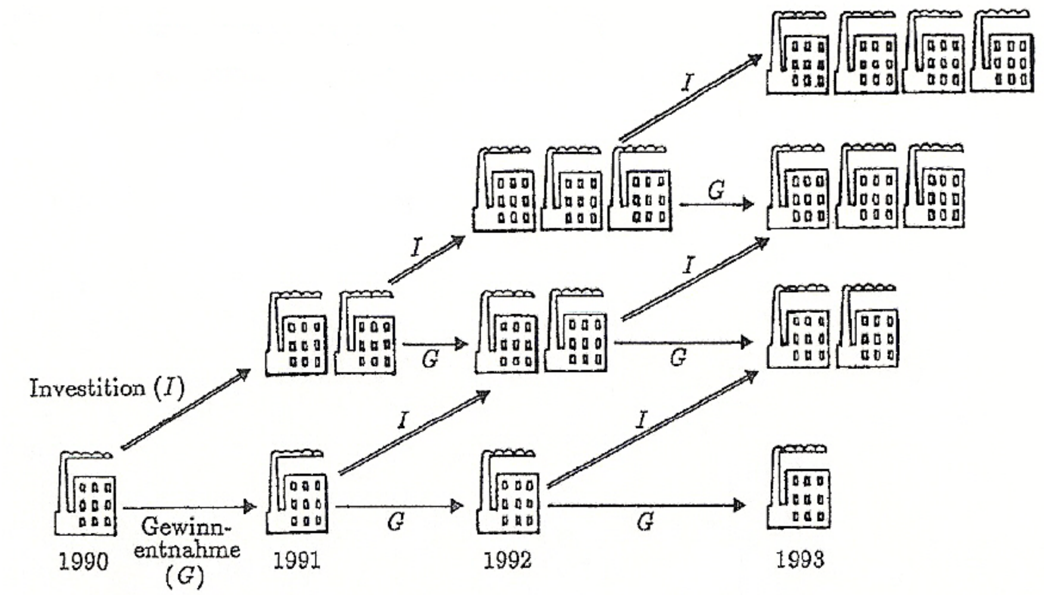
In einer Schreinerei seien aus großen Pressspantafeln zum Bau von Regalen eine Anzahl kleinerer Platten zu schneiden, wobei möglichst wenige Tafeln zerschnitten werden sollen. Bei der Erstellung der Schnittmuster ist (aus technischen Gründen) zu beachten, dass Schnitte durchgehend und parallel zu den Seitenkanten erfolgen (Guillotine-Schnitte). Die hier vorzunehmende Verschnittoptimierung zerfällt in drei Teile:

(i) Systematische Erzeugung von Schnittmustern

(ii) Formulierung und Lösung eines linearen Optimierungsproblems, das einem Produktionsproblem entspricht (vgl. Bsp. P) mit den Tafeln als Rohstoffen und den Platten als produzierten Gütern. Variablen sind die jeweiligen Anzahlen der Tafeln gemäß dem jeweiligen Schnittmuster. Die Gesamtzahl der verarbeiteten Tafeln ist zu minimieren unter der Beachtung der Zahl der benötigten Platten.

(iii) Geeignete Erzeugung einer zulässigen ganzzahligen Lösung aus der optimalen Lösung des linearen Optimierungsproblems, da die Tafeln jeweils vollständig verschnitten werden.

Beispiel 1.6 (Investitionsentscheidungen)



Das Management eines Unternehmens habe zu Beginn des ersten Jahres den mittelfristigen Plan für die Verwendung der Überschüsse in dem anschließenden Dreijahreszeitraum aufzustellen. Hierbei sei bei bekannten Daten über die zukünftige Marktentwicklung zu entscheiden, welcher Anteil der Überschüsse jedes Jahr für Investitionen verwendet werden soll. Ziel dieser Investitionsstrategie ist die Maximierung der Summe aus Vermögen und Gewinnentnahmen bis zum Ende des dritten Jahres (der Einfachheit halber seien hier steuerliche Gesichtspunkte und Zinseffekte außer Acht gelassen).

Bezeichnen wir mit x_j $(j = 1,2,3)$ den Wert des Vermögens zum Bilanzstichtag (am 1.1.) des Jahres j und mit $G_j(x_j)$ den Gewinn, der mit diesem Vermögen im Jahr j erwirtschaftet wird, so ist bei der Entscheidung über die Höhe u_j der Gewinnentnahme die Bedingung

$$0 \leq u_j \leq G_j(x_j) \quad (j = 1,2,3)$$

zu beachten. Der nicht entnommene Gewinn steht für Investitionen zu Verfügung, sodass das Vermögen (ohne Berücksichtigung von Abschreibungen) gemäß

$$x_{j+1} = x_j + G_j(x_j) - u_j \quad (j = 1,2,3)$$

fortzuschreiben ist (x_4 ist der Wert des Vermögens am Ende des Dreijahreszeitraumes). Als Zielbedingung erhalten wir damit

$$\sum_{j=1}^{3} u_j + x_4 \to \max .$$

Dieses Maximierungsproblem, das darin besteht, eine optimale Folge voneinander abhängiger Entscheidungen in den drei Jahren zu bestimmen, ist typisch für viele Planungsaufgaben. Auf der Basis des momentan erreichten Zustands (in unserem Beispiel das Vermögen zum Bilanzstichtag) und der Kenntnis bzw. Prognose für die zukünftige Entwicklung ist jeweils eine Entscheidung (Höhe der Gewinnentnahme) zu treffen, die den Folgezustand bestimmt und mit Kosten oder Gewinn verbunden ist. Derartige sequenzielle Entscheidungsprobleme für in der Zeit ablaufende steuerbare Prozesse werden als dynamische Optimierungsprobleme bezeichnet, wenn sie sich in der Form

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} g_j(x_j, u_j) + h(x_{n+1}) \to \max \\ &\qquad \text{unter NB:} \quad x_{j+1} = f_j(x_j, u_j), \quad (j = 1, \ldots, n) \\ &\qquad\qquad\qquad x_j,\ u_j,\ x_{n+1} \text{ „zulässig“ } (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

darstellen lassen. Die Zulässigkeit der Variablen x_j, u_j und x_{n+1} wird dabei durch weitere Restriktionen beschreiben.

(Beispiele 1.5-1.6 Quelle: Neumann/Morlock; Operations Research)

Beispiel 1.7 (Beispiel K)
In einem Kraftwerk werden zur Energiegewinnung Kohle und Öl in drei verschiedenen Sorten verbrannt. Es müssen mindestens 40.000 kWh/Tag produziert werden. Pro Tonne Öl ergeben sich (bei allen drei Sorten) 3.000 kWh und pro Tonne Kohle 2.000 kWh. Umweltvorschriften erlauben maximal 120 kg Schadstoffausstoß/Tag. Aufgrund von Tests kann man bei Kohle mit 30 kg, bei Öl der Sorte 1 mit 15 kg, der Sorte 2 mit 10 kg und der Sorte 3 mit 5 kg Schadstoff/Tonne rechnen. Die Kosten betragen bei Kohle 20€/t, bei Öl Sorte 1,2,3 jeweils 90€, 96€, 105€/t.

Welche Mengen m_1, m_2, m_3 an Öl der Sorten 1,2,3 und Kohle m_4 soll man verbrennen, um die Kosten/Tag möglichst gering zu halten?

Dies führt auf folgendes lineare Optimierungsproblem:

Beispiel 1.8 (Beispiel L)
Ein Landwirt will 100 ha Land z.T. mit Kartoffeln und z.T. mit Getreide bepflanzen. Dabei soll gelten:

	Kartoffeln	Getreide	verfügbar
Anbauskosten (T €/ ha)	1	2	110 T€
Arbeitstage/ha	1	4	160 Tage
Gewinn (T €/ha)	1	3	

Wie viel ha Land soll der Landwirt mit Kartoffeln bzw. Getreide bepflanzen, damit sein Gewinn maximal wird?

Bezeichne: $x_1 = \#$ ha mit Kartoffeln $\qquad x_2 = \#$ ha mit Getreide

LOP: $x_1 + 3x_2 \to \max$

NB:
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 110 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 160 \\ x_1 + x_2 &\leq 100 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

in Standardform: $x_1 + 3x_2 \to \max$

NB:
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + y_1 &= 110 \\ x_1 + 4x_2 + y_2 &= 160 \\ x_1 + x_2 + y_3 &= 100 \\ x_{1,2} \geq 0,\ y_{1,2,3} &\geq 0 \end{aligned}$$

Setzen wir $x := (x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)^\top$, so können wir das LOP in der Standardform auch schreiben als:

$$\begin{aligned} F(x) &= c^\top x \to \max \\ \text{unter NB:} \quad Ax &= b,\ x \geq 0 \\ \text{mit} \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ c^\top = (1, 3, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

I Offenbar bilden $a^3 = (1,0,0)^\top$, $a^4 = (0,1,0)^\top$, $a^5 = (0,0,1)^\top$ eine Basis von A $\Rightarrow y_1, y_2, y_3$ sind Basisvariablen, x_1, x_2 sind NBV und $x^0 := (0, 0, 110, 160, 100)$ ist eine Basislösung des LOP, die wegen $110 > 0$, $160 > 0$, $100 > 0$ eine zulässige Basislösung ist und damit eine Ecke von Z

II Es gilt $F(x^0) = 0 \Rightarrow x^0$ ist sicher nicht optimal (z.B. $F((1,1,0,0,0)) = 4$ und $(1,1) \in Z$)

III Austauschschritt: Ausgehend von der Ausgangsecke x^0 finde eine neue (benachbarte) Ecke x^1 mit $F(x^1) \geq F(x^0)$
Eine neue Ecke erhalten wir, indem wir einen SV von A, der zur Basis von x^0 gehört, gegen einen anderen SV von A austauschen, sodass wieder m linear unabhängig SV von A, d.h. eine neue Basis von A und damit

eine neue Basislösung des LOP rsp. ZBL und damit Ecke von Z erreicht wird.
Mit anderen Worten: „Wir tauschen eine BV gegen eine NBV aus.“

Frage: Welche der bisherigen NBV soll BV werden?
Eine bisherige NBV zur BV zu machen bedeutet, ihren Wert > 0 zu machen (übrige NBV bleiben auf dem Wert 0).
Da (in unserem Beispiel) die Koeffizienten der NBV x_1 bzw. x_2 in der Zielfunktion die Werte $c_1 = 1$ bzw. $c_2 = 3$ haben, wird der Wert der Zielfunktion bei Vergrößerung von x_2 schneller größer als bei x_1.
$\Rightarrow$ wähle x_2 als neue BV

Ändert x_2 seinen Wert $x_2 > 0$, so ändern auch die bisherigen BV ihre Werte: Betrachten wir die Restriktionen $Ax = b$ und lösen diese Gleichungen nach den alten BV auf, so gilt:

$$\begin{aligned} y_1 &= 110 - x_1 - 2x_2 \\ y_2 &= 160 - x_1 - 4x_2 \qquad (*) \\ y_3 &= 100 - x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Woraus folgt: wenn x_2 größer wird $\Rightarrow y_1,\ y_2,\ y_3$ werden kleiner
Wegen $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$ und $x_1 = 0$ (NBV) ergeben sich aus $(*)$

$$\begin{aligned} x_2 &\leq \frac{110}{2} = 55 \\ x_2 &\leq \frac{160}{4} = 40 \\ x_2 &\leq 100 \end{aligned}$$

Da alle 3 Ungleichungen gelten müssen, folgt

$$x_2 \leq \min\{55,\ 40,\ 100\} = 40$$

d.h. der größtmögliche Wert der neuen BV x_2 (unter Einhaltung der NB) ist 40.

$$x_2 = 40 \Rightarrow y_2 = 0$$

d.h. y_2 wird (wenn x_2 neue BV wird) zur NBV.
$\Rightarrow a^2,\ a^3,\ a^5$ sind neue Basis (beachte: $a^2,\ a^3,\ a^5$ sind lin. unabh.) und es ergibt sich

$$\begin{aligned} x_2 &= 40 \\ y_1 &= 110 - 80 = 30 \\ y_3 &= 100 - 40 = 60 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x^1 = (0, 40, 30, 0, 60)$ ist zulässige Basislösung des LOP
$\Leftrightarrow x^1$ ist Ecke von Z

$$F(x^1) = +120 > F(x^0)$$

Um von x^1 ausgehend einen weiteren Austauschschritt vorzunehmen (sofern x^1 nicht optimal) bringen wir das Gleichungssystem $Ax = b$ und die Zielfunktion in die gleiche „zweckmäßige" Form, wie sie beim 1. Austauschschritt vorlag, d.h.

1. Jede Gleichung enthält genau 1 BV und zwar mit dem Koeffizient 1 und diese BV tritt in keiner anderen Gleichung auf
2. Die Zielfunktion ist als Funktion der NBV gegeben

Diese Form erreichen wir durch elementare Umformungen, wie wir sie vom Gauß-Algorithmus kennen (beachte: elementare Zeilenoperationen ändern die Lösung eines LGS nicht!)

Start-System:

$$\begin{array}{c|c|l}
 & \begin{array}{cccccc} \text{NBV} & \text{NBV} & \text{BV} & \text{BV} & \text{BV} & \end{array} & \\
 & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & y_3 & b \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 110 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 160 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 100 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ z_1 - 0.5z_2 \\ z_3 - 0.25z_2 \\ 0.25z_2 \end{array} \\
\hline
F: & \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} & F - 0.75z_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} \text{NBV} & \text{BV} & \text{BV} & \text{NBV} & \text{BV} & \end{array} \\
 & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & y_3 & \text{rS} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 30 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 40 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 60 \end{pmatrix} \\
\hline
F: & \begin{array}{cccccc} \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & \text{-120} \end{array}
\end{array}$$

Auflösen der Gleichungen nach den neuen Basisvariablen ergibt:

$$\begin{aligned} y_1 &= 30 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_2 \\ x_2 &= 40 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}y_2 \qquad (**) \\ y_3 &= 60 - \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}y_2 \end{aligned}$$

Mit $(**)$ folgt, wenn wir F durch die neuen NBV ausdrücken:

$$F(x) = x_1 + 3x_2 = 120 + \frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}y_2 \;\Rightarrow\; F(x^1) = 120$$

Hieraus erkennen wir, dass für den nächsten Austauschschritt nur x_1 als neue BV in Frage kommt (bei $y_2 > 0$ würde F abnehmen).

Aus $(**)$ ergibt sich (analog zum Vorgehen im ersten Austauschschritt)

$$x_1 \leq 60,\; x_1 \leq 160,\; x_1 \leq 80$$

sodass der größte Wert, den die BV x_1 (unter den NB) annehmen kann, 60 ist. Für $x_1 = 60$ ist $y_1 = 0$, sodass y_1 zur neuen NBV wird.a^1, a^2, y^3 sind linear unabhängig und damit eine neue Basis von A.
Für x_2 und y_3, die weiterhin in der Basis bleiben, folgt (mit $x_1 = 60$ ist $y_1 = 0$) aus $(**)$

$$x_2 = 40 - 15 = 25$$
$$y_3 = 60 - 45 = 15$$

$\Rightarrow x^2 = (60, 25, 0, 0, 15)$ ist zulässige Basislösung des LOP
$\Leftrightarrow x^2$ ist Ecke von Z

$$F(x^2) = x_1 + 3x_2 = 60 + 3 \cdot 25 = 135$$

Drücken wir F mit Hilfe der NBV y_1 und y_2 aus, so erhalten wir

$$F(x) = 120 + \frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}y_2 = 135 - \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2$$

Jede Vergrößerung der NBV (auf Werte > 0) würde jetzt zu einer Verkleinerung des Wertes der Zielfunktion führen, sodass offenbar in $x^2 = (60, 25, 0, 0, 15)$ die optimale Lösung liegt mit

$$\max\; F(x) = 135 \quad \forall\, x \in Z$$

Der Landwirt sollte also 60 ha seines Landes mit Kartoffeln und 25 ha mit Getreide bebauen, um einen maximalen Gewinn von $135T$€ zu erzielen.
$y_1 = y_2 = 0$ und $y_3 = 15$ besagen, dass bei der optimalen Lösung die verfügbaren Geld- und Zeitressourcen ausgeschöpft sind, während 15 ha Land unbebaut bleiben.

Schematische Darstellung:

BV	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	r.S
y_1	1	2	1	0	0	110
y_2	1	4	0	1	0	160
y_3	1	1	0	0	1	100
$-F(x)$	-1	-3	0	0	0	0

BV	x_1	y_2	y_1	y_2	y_3	r.S
y_1	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	30
x_2	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0	40
y_3	$\frac{3}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	1	60
$-F(x)$	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{3}{4}$	0	120

BV	y_1	x_2	y_1	y_2	y_3	r.S
x_1	1	0	2	-1	0	60
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	25
y_3	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	15
$-F(x)$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	135

1.6.2 Der Simplex-Algorithmus

Gegeben sei ein LOP in Standardform:

$$\begin{aligned} F(x) = c^\top x \to \max \quad & \text{mit } x = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)^\top \in \mathbb{R}^{m+n} \\ & \text{und } c = (c_1, \dots, c_n, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^{m+n} \end{aligned}$$

$$\text{unter NB:} \quad Ax = b, \quad \text{wobei } A \in \mathbb{R}^{m\times(m+n)}, b \in \mathbb{R}^m,\ \mathrm{Rg}(A) = m < m+n$$
$$x \geq 0.$$

Zusätzlich soll (zunächst) gelten, dass $b \geq 0$.

Das LOP schrieben wir dann in ein sogenanntes **Simplextableau**:

BV	x_1	x_2	$\dots$	x_n	y_1	y_2	$\dots$	y_m	r.S
	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	1	0	$\dots$	0	b_1
	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	0	1	$\dots$	0	b_2
	$\dots$								
	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	0	0	$\dots$	1	b_m
-F	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_n$	0	0	$\dots$	0	$0 = F(x^0)$

1. **Startecke:**
   Da $b_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, m$ folgt, dass $x^0 = \binom{0}{b}$ eine erste zulässige Basislösung (evtl. entartet, falls $b_i = 0$ für irgendein i), also eine Startecke ist.

2. **Optimalitätskriterium:**
   Eine zulässige Basislösung (Ecke) eines LOPs ist so lange nicht optimal, wie sich in der letzten Zeile (Zielfunktionszeile) des Simplextableaus noch negative Koeffizienten befinden.

3. **Austauschschritt:**

   a) Stehen in der Zielfunktionszeile noch negative Koeffizienten, so wähle unter diesen den (einen) kleinsten aus: $-c_{k_0}$. Die zugehörige Spalte im Tableau heißt **Pivotspalte**. Sie legt die neue BV fest.

   b) Es gibt zwei Möglichkeiten:

      i. Enthält die Pivotspalte keine positiven Koeffizienten, so hat das LOP keine optimale Lösung ($F_{\max} = \infty$)

ii. Enthält die Pivotspalte positive Koeffizienten $a_{ik_0} > 0$, so bilde für diese $\frac{b_i}{a_{ik_0}}$ und bestimme:

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik_0}}, i = 1, \ldots, m, a_{ik_0} > 0\right\} = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0k_0}}.$$

Die durch dieses Minimum festgelegte Zeile i_0 heißt **Pivotzeile**. Die Zahl $a_{i_0k_0}$ im Schnittpunkt von Pivotspalte und Pivotzeile heißt **Pivotelement**.

c) Durch elementare Zeilenoperationen (mit der Pivotzeile), angewendet auf das gesamte Tableau, inklusive der Zielfunktionszeile, wird in der Pivotspalte der i_0-te Einheitsvektor erzeugt. Dadurch wird x_{k_0} zur neuen BV und simultan y_{i_0} zur NBV.

Damit ergibt sich als neues Tableau:

BV	x_1	x_2	$\ldots$	x_{k_0}	$\ldots$	x_n	y_1	y_2	$\ldots$	y_{i_0}	$\ldots$	y_m	r.S
	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{12}$	$\ldots$	0	$\ldots$	$\hat{a}_{1n}$	1	0	$\ldots$	g_1	$\ldots$	0	$\hat{b}_1$
	$\hat{a}_{21}$	$\hat{a}_{22}$	$\ldots$	0	$\ldots$	$\hat{a}_{2n}$	0	1	$\ldots$	g_2	$\ldots$	0	$\hat{b}_2$
	$\ldots$												
	$\hat{a}_{i_01}$	$\hat{a}_{i_02}$	$\ldots$	1	$\ldots$	$\hat{a}_{i_0n}$	0	0	$\ldots$	g_{i_0}	$\ldots$	0	$\hat{b}_{i_0}$
	$\ldots$												
	$\hat{a}_{m1}$	$\hat{a}_{m2}$	$\ldots$	0	$\ldots$	$\hat{a}_{mn}$	0	0	$\ldots$	g_m	$\ldots$	1	$\hat{b}_m$
-F	$\hat{c}_1$	$\hat{c}_2$	$\ldots$	0	$\ldots$	$\hat{c}_n$	0	0	$\ldots$	g_{m+1}	$\ldots$	0	$0 + \frac{b_{i_0}c_{k_0}}{a_{i_0k_0}}$

Offenbar bleiben die übrigen BV $y_1, \ldots, y_{i_0-1}, y_{i_0+1}, \ldots, y_m$ als BV erhalten, neue BV ist x_{k_0}.

Lösen wir das lineare Gleichungssystem nach den BV auf (und setzen dabei die NBV = 0) so erhalten wir

$$x_1 = \ldots = x_{k_0-1} = x_{k_0+1} = \ldots = x_n = 0,\ y_{i_0} = 0,$$
$$x_{k_0} = \hat{b}_{i_0}, y_j = \hat{b}_j \text{ für } j = 1, \ldots, m,\ j \neq i_0$$

ist eine neue zulässige Basislösung (Ecke) x^1 von Z.

Ferner gilt: $F(x^1) = 0 + \frac{b_{i_0}c_{k_0}}{a_{i_0k_0}} > 0$, d.h. der Wert der Zielfunktion wird größer.

4. Der Algorithmus wird so lange wiederholt, bis das Optimalitätskriterium erfüllt ist (oder der Algorithmus im Austauschschritt 3(b)i abbricht).

1.6.4 Die zwei-Phasen Methode

Wir betrachten nun ein **beliebiges** LOP der Form

$$
\begin{aligned}
F = \tilde{c}^\top \tilde{x} &\to \max \\
\text{unter NB:} \quad \tilde{A}\tilde{x} &\begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} b, \quad \tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times \tilde{n}} \\
\tilde{x} &\geq 0,
\end{aligned}
$$

Durch Einführen von „geeigneten" Schlupfvariablen erhalten wir die Standardform $\widehat{\text{SF}}$.

$$
\widehat{\text{SF}} \quad \begin{cases} \quad\quad F = c^\top x \to \max \\ \text{NB:} \quad Ax = b, \end{cases}
$$

mit $c = \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ y \end{pmatrix}$, $A = (A|S)$, wobei S die Matrix der Schlupfvariablen ist. Dabei dürfen jetzt auch:

- Schlupfvariablen mit negativen Vorzeichen (bei NB mit $\geq$)
- Schlupfvariablen mit Wert 0 (bei NB mit $=$)

auftreten.

$\Rightarrow x = (0, \ldots, 0, y_1, \ldots, y_m)^\top$ führt i.A. zu keiner zulässigen Basislösung (evtl. sogar zu keiner Basislösung).

„Abhilfe" durch: **2-Phasen-Methode:**

$\widehat{=}$ (formal) Anwendung des Simplex-Algorithmus auf ein erweitertes Problem.

Dies führt zu einer **ersten zulässigen Basislösung**. Danach kann man in der zweiten Phase den primalen Simplex-Algorithmus auf das (wieder reduzierte) Problem anwenden.

Vorgehen:

1. **Erste Phase:** Bestimmen einer 1. ZBL (= Startecke)

   a) Zu jeder Nebenbedingung in $\widehat{\text{SF}}$, die **keine** Schlupfvariable mit **positivem (>0)** Vorzeichen besitzt, fügen wir (auf der linken Seite der NB-Gleichung) eine „künstliche" Variable $\tilde{y}_j \geq 0$ hinzu.

b) Wir fügen dem Tableau eine zusätzliche Zeile mit einer weiteren Zielfunktion $\widetilde{Y}$ an:

$$\widetilde{Y} = \sum_j \tilde{y}_j \to \min \;\Leftrightarrow\; -\widetilde{Y} = -\sum_j \tilde{y}_j \to \max\,.$$

c) Auf das so erweiterte Problem wird der primale (!) Simplex-Algorithmus angewendet, so lange bis alle $\tilde{y}_j$ (die sich zu Beginn in der Basis befinden!) die Basis verlassen haben.

Wichtig: Sobald ein $\tilde{y}_j$ die Basis verlassen hat, wird es aus der weiteren Rechnung ausgeschlossen ($\rightsquigarrow$ Spalte streichen!)

2. **Zweite Phase:** Haben alle $\tilde{y}_j$ die Basis verlassen und gilt dabei $\widetilde{Y}^* = 0$, so ist eine 1. ZBL des LOPs ist gefunden.
Weiter mit primalen Simplex-Algorithmus (angewendet auf das nach der ersten Phase erhaltene Tableau ohne $\tilde{y}_j, \widetilde{Y}$).

Bem. Haben alle $\tilde{y}_j$ die Basis verlassen und gilt $\widetilde{Y}^* \neq 0$, dann hat das Ausgangsproblem keine Lösung, da $Z = \emptyset$.

Satz 1.22 (Schwacher Dualitätssatz)
Gegeben sei ein primales LOP (L) mit dualem Problem (D) gemäß Definition 1.21. Ferner seien

$$Z_L = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b, \ x \geq 0\}$$
$$Z_D = \{u \in \mathbb{R}^m : \ A^\top u \geq c, \ u \geq 0\}$$

die zugehörigen zulässigen Bereiche. Dann gilt

(i) Für $x \in Z_L$ und $u \in Z_D$ ist stets

$$F(x) = c^\top x \leq b^\top u = G(u).$$

(ii) Falls für ein $x^* \in Z_L$ und $u^* \in Z_D$ gilt

$$F^* := F(x^*) = c^\top x^* = b^\top u^* = G(u^*) =: G^*,$$

so ist x^* eine optimale Lösung von (L) und u^* eine optimale Lösung von (D).

Beweis.

Satz 1.23 (Starker Dualitätssatz)
Gegeben sei ein primales LOP (L) mit dualem Problem (D) gemäß Definition 1.21. Dann gilt:

(i) Hat eines der beiden Probleme (L) oder (D) eine optimale Lösung x^* bzw. u^*, so auch das andere und es gilt $F(x^*) = G(u^*)$.

(ii) Hat eines der beiden Probleme keinen zulässigen Punkt (d.h. gilt $Z_L = \emptyset$ oder $Z_D = \emptyset$), so hat keines der beiden Probleme eine Lösung.

(iii) Besitzen beide Probleme (L) und (D) mindestens einen zulässigen Punkt (d.h. gilt $Z_L \neq \emptyset$ und $Z_D \neq \emptyset$), so besitzen beide Probleme eine optimale Lösung und die Funktionswerte im Optimum sind gleich.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt unter Verwendung des Lemmas von Farkas.

Satz 1.24 (Komplementaritätssatz)
Gegeben sei ein primales LOP (L) mit dualem Problem (D) gemäß Definition 1.21. Ferner seien $x \in Z_L$ und $u \in Z_D$ mit zugehörigen Schlupfvariablen y_i bzw. v_j für welche gilt:

$$\begin{aligned} y &= b - Ax \geq 0,\ y \in \mathbb{R}^m \\ v &= A^\top u - c \geq 0,\ v \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Dann sind x^* und u^* genau dann optimale Lösungen von (L) bzw. (D), wenn sie die sog. **Komplementaritätsbedingungen** erfüllen:

$$\begin{aligned} &y_i^* u_i^* = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m \\ &x_j^* v_j^* = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, n \\ &\text{d.h. } (y^*)^\top u^* + (x^*)^\top v^* = 0. \end{aligned}$$

Beweis.

Bemerkungen:

1. Der Komplementaritätssatz wird auch als „Satz vom komplementären Schlupf“ bezeichnet. Er besagt: x^* und u^* sind optimale Lösungen von (L) bzw. (D) genau dann, wenn gilt

   $x_j^* > 0 \Rightarrow$ Schlupfvariable der j-ten NB von (D) $v_j = 0$ und umgekehrt

   und

   $u_i^* > 0 \Rightarrow$ Schlupfvariable der i-ten NB von (L) $y_i = 0$ und umgekehrt.

2. Die Variablen x_j $(j = 1, \ldots, n)$ des primalen Problems und u_i $(i = 1, \ldots, m)$ des dualen Problems werden als Strukturvariablen von (L) bzw. (D) bezeichnet.

3. Aus dem Komplementaritätssatz ergibt sich, dass die Strukturvariablen aus (L) mit den Schlupfvariablen aus (D) korrespondieren und umgekehrt, sodass im Optimaltableau von (L) auch die optimalen Werte von (D) enthalten sind (und umgekehrt). Betrachten wir die Werte in der Zeile der Zielfunktion im optimalen Tableau, so gilt:

   a) Der Wert, der bei der j-ten Strukturvariable in der Zielfunktionszeile von (L) steht, entspricht dem Wert der j-ten Schlupfvariable in (D).

   b) Der Wert, der bei der i-ten Schlupfvariable in der Zielfunktionszeile von (L) steht, entspricht dem Wert der i-ten Strukturvariable in (D) (Schattenpreise).

   Entsprechendes gilt für die Werte in der Zielfunktionszeile im optimalen Tableau von (D).
   (Beachte: Bei den Basisvariablen steht in der ZF-Zeile jeweils der Wert 0.)

Ökonomische Interpretation der Dualität:
Wir betrachten erneut die Produktionsplanung (vgl. Abschnitt 1.6.2).

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 \to \max \\ \text{unter NB:} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad \text{(Laufzeit Maschine A)} \\ & 3x_1 + x_2 \leq 9 \quad \text{(Laufzeit Maschine B)} \end{aligned}$$

BV	x_1	x_2	r.S
y_1	1	2	8
y_2	3	1	9
-F	-6	-4	0

$\xrightarrow{Simplex-Alg.}$

BV	y_2	y_1	r.S
x_2	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	3
x_1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	2
ZF	$\frac{8}{5}$	$\frac{6}{5}$	24

$\Rightarrow x^* = (2,3),\ y_1 = y_2 = 0$ (d.h. volle Auslastung der Maschinen A und B)

Ein Investor sei an der Übernahme der Firma interessiert. Um eine Übernahme zu kalkulieren, versieht er jede Ressource (pro Einheit) mit einem Preis, den er zu zahlen bereit ist, dem sog. Schattenpreis.

u_1: Preis für 1 Std. Laufzeit bei Maschine A
u_2: Preis für 1 Std. Laufzeit bei Maschine B
$\Rightarrow$ Der „Preis“ für die tägliche Produktion ist $G(u_1, u_2) = 8u_1 + 9u_2$ und der „Preis“ pro Einheit von P_1 beträgt $u_1 + 3u_2$ und für P_2: $2u_1 + u_2$.

Damit die Übernahme für den bisherigen Besitzer attraktiv ist, müssen diese „Preise“ höher sein als der damit bisher erzielte Gewinn (pro Einheit), d.h.

$$u_1 + 3u_2 \geq 6 \quad \text{und} \quad 2u_1 + u_2 \geq 4$$

Ziel des Investors: $G \to \min$ unter den Angebotsrestriktionen, d.h.

$$\begin{aligned} & G \to \min \\ \text{unter NB:} \quad & u_1 + 3u_2 \geq 6 \\ & 2u_1 + u_2 \geq 4 \\ & u_1,\ u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ (D)

Definition
Gegeben sei ein Matrixspiel (S, T, A).

(i) Ein Vektor $p = (p_1, \ldots, p_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ mit $0 \le p_i \le 1$ $(1 \le i \le m)$ und $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ heißt **gemischte Strategie des Spielers** P_1.

(ii) Ein Vektor $q = (q_1, \ldots, q_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ mit $0 \le q_j \le 1$ $(1 \le j \le n)$ und $\sum_{j=1}^n q_j = 1$ heißt **gemischte Strategie des Spielers** P_2.

(iii) Die Spezialfälle $p_{i_0} = 1$ und $p_i = 0$ $(i \neq i_0)$ für ein i_0, $1 \le i_0 \le m$ bzw. q_{j_0}=1 und $q_j = 0$ $(j \neq j_0)$ für ein j_0, $1 \le j_0 \le n$ heißen **reine Strategien**.

(iv) $P = \{p \in \mathbb{R}^m : \ 0 \le p_i \le 1 \ (1 \le i \le m), \ \sum_{i=1}^m p_i = 1\}$ und $Q = \{q \in \mathbb{R}^n : \ 0 \le q_j \le 1 \ (1 \le j \le n), \ \sum_{j=1}^n q_j = 1\}$ heißen **gemischte Strategiemengen** der Spieler P_1 und P_2.

Bemerkung

(i) P, Q sind <u>keine endlichen</u> Strategiemengen.

(ii) P, Q sind konvexe Mengen.

Definition
Ist (S, T, A) ein Matrixspiel mit gemischten Strategiemengen P und Q, dann heißt

$$E(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j = p^\top A q$$

der **Erwartungswert** des Spiels. Das Spiel (P, Q, E) heißt (die zu (S,T,A) gehörige) **gemischte Erweiterung**.

Bemerkung

(i) $E(p, q)$ „ersetzt" A bei gemischten Strategien
$\Rightarrow (P, Q, E)$ ist „neues" (zu (S, T, A) gehöriges) Spiel mit Strategiemengen P, Q und Auszahlung E

(ii) $E(p, q)$ stellt den durchschnittlich zu erwartenden Gewinn für P_1 dar, wenn P_1 die gemischte Strategie $p \in P$ und P_2 die gemischte Strategie $q \in Q$ spielt.

Optimale Strategien bei gemischten Erweiterungen

<u>Voraussetzung:</u> Rationales Verhalten von P_1 und P_2

Ziel von P_1: $E(p,q)$ möglichst groß
Ziel von P_2: $E(p,q)$ möglichst klein

Daraus folgt:

- P_1 wird Strategie $p^* \in P$ so wählen, dass $E(p,q)$ möglichst groß wird, wobei er einkalkuliert, dass P_2 auf Minimierung von $E(p,q)$ abzielt
  $\Rightarrow P_1$ strebt an:
  $$\underline{E} := \max_{p \in P}(\min_{q \in Q} E(p,q))$$
  $\rightsquigarrow p^*$: Maximin-Strategie von P_1
- P_2 wird Strategie $q^* \in Q$ so wählen, dass $E(p,q)$ möglichst klein wird, wobei er einkalkuliert, dass P_1 auf Maximierung von $E(p,q)$ abzielt
  $\Rightarrow P_2$ strebt an:
  $$\overline{E} := \min_{q \in Q}(\max_{p \in P} E(p,q))$$
  $\rightsquigarrow q^*$: Minimax-Strategie von P_2

Für Matrixspiele mit gemischter Erweiterung gilt nun (mit den Bezeichnungen von oben):

Hauptsatz für Matrixspiele

Bei einem Matrixspiel (S,T,A) mit gemischter Erweiterung (P,Q,E) existieren für beide Spieler stets optimale Strategien $p^* \in P,\ q^* \in Q$, sodass gilt:

$$E^* := E(p^*,q^*) = \underline{E} = \overline{E}$$

d.h.

$$E^* = \max_{p \in P}(\min_{q \in Q} E(p,q)) = \min_{q \in Q}(\max_{p \in P} E(p,q)).$$

Definition
Der Wert $E^* := E(p^*,q^*) = \underline{E} = \overline{E}$ heißt **Wert des Spiels**.
Das Spiel heißt **fair**, wenn $E^* = 0$ gilt.

Durchführung des Simplex-Algorithmus für Matrixspiele mit gemischter Erweiterung

Allgemein können wir zur Lösung von Matrixspielen (S,T,A) mit gemischter Erweiterung (P,Q,E) wie folgt vorgehen:

Schritt 1: Wähle $\lambda \geq 0$ so, dass $A+\lambda D > 0$ gilt und ersetze A durch $\hat{A} = A+\lambda D$ mit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Löse das LOP $(\hat{\text{L}})$:

$$\begin{aligned} & \hat{z} := e^\top \hat{q} \to \max \\ \text{unter NB:} \quad & \hat{A}\hat{q} \leq \hat{e} = (1,\dots,1)^\top \in \mathbb{R}^m \text{ mit } \hat{A} = A+\lambda D \\ & \hat{q} \geq 0. \end{aligned}$$

Das zugehörige Simplextableau lautet dann:

BV	$\hat{q_1}$	$\dots$	$\hat{q_n}$	r.S
y_1				1
$\vdots$		$(a_{ij}+\lambda)$		$\vdots$
y_m				1
$-\hat{z}$	-1	$\dots$	-1	0

$\overset{Simplex-Alg.}{\longrightarrow}$ Lösung: $\hat{q}^*,\ \hat{p}^*,\ \hat{z}^*$

Schritt 3: Rücktransformation auf Lösung $p^*,\ q*,\ E^*$:

$$q^* = \frac{\hat{q}^*}{\hat{z}^*}, \quad p^* = \frac{\hat{p}^*}{\hat{z}^*}, \quad E^* = \frac{1}{\hat{z}^*} - \lambda$$

Kapitel 2

Differentialgleichungen

2.1 Beispiele für das Auftreten von DGLen in ökonomischen Modellen

2.1.1 Wachstum einer Population

(a) $N'(t) = \alpha \cdot N(t)$ für $t \geq 0$,
Anfangswert $N(0) = N_0$ (= Anzahl der Individuen zu Begin der Beobachtung)
mit $N(t)$: Bevölkerung zur Zeit t, $\alpha > 0$: konstante Wachstumsrate.
Lösung: $N(t) = N_0 \cdot e^{\alpha t}$

(b) $N'(t) = \alpha(t) \cdot N(t)$ für $t \geq 0$,
Anfangswert $N(0) = N_0$
mit $\alpha(t)$: variable Wachstumsrate.
Lösung: $N(t) = N_0 \cdot e^{A(t)}$ mit $A(t) = \int_0^t \alpha(u)du$

2.1.2 Renten- und Tilgungsrechnung

$K'(t) = r(t) \cdot K(t) - I(t)$ für $t \geq 0$,
$K(0) = P$ Barwert
mit $K(t)$: Restkapital zum Zeitpunkt t, $r(t)$: variabler Zinssatz, $I(t)$: Renten-/Tilgungsfluss.
Lösung: $K(t) = e^{R(t)} \cdot [P - J(t)]$ mit $R(t) = \int_0^t r(u)du,\ J(t) = \int_0^t I(u)e^{-R(u)}du.$

2.1.3 Preisfestsetzungsmodell von Evans (1930)

Nachfrage $D(t)$ und Angebot $S(t)$ seien linear vom Preis $P(t)$ anhängig:

$$D(t) = \alpha + a \cdot P(t), \quad a < 0$$
$$S(t) = \beta + b \cdot P(t), \quad b > 0.$$

Die Preisänderung sei proportional zum Nachfrageüberschuss:

$$P'(t) = \gamma(D(t) - S(t)), \quad \gamma > 0 \quad \Rightarrow \quad P'(t) = \gamma(a-b) \cdot P(t) + \gamma(\alpha - \beta).$$

Anfangswert: $P(0) = P_0$.
Lösung: $P(t) = -\frac{\alpha-\beta}{a-b} + (P_0 + \frac{\alpha-\beta}{a-b}) \cdot e^{\gamma(a-b)t}$

2.1.4 Markttrend und Verbrauchernachfrage

In einem Markt, wie z.B. dem Immobilien- (oder Aktien-) Markt, versuchen die Verbraucher Vorteile aus dem „Trend“ zu ziehen. Ihre Nachfrage richtet sich nicht nur nach dem momentanen Marktpreis aus, sondern auch daran, wie schnell der Preis in der Vergangenheit gestiegen oder gefallen ist und ob diese Änderung sich verlangsamt oder beschleunigt. (Nachrichten: „Nach Aussagen des Statistischen Bundesamtes hat sich der Preisanstieg im letzten Monat verlangsamt.“)

Betrachten wir den Preis als Funktion der Zeit $P = P(t)$, so wird der Preisanstieg durch $P'(t)$, die Änderung (Geschwindigkeit) des Preisanstiegs durch $P''(t)$ beschrieben.
Sei die Verbrauchernachfrage z.B. gegeben durch

$$q^D = q^D(t) = 9 - 6P(t) + 5P'(t) - 2P''(t).$$

So entspricht dies einer linearen Nachfragefunktion, modifiziert durch die Berücksichtigung eines Trends.
Die Angebotsfunktion q^S sei gegeben durch

$$q^S = q^S(t) = -3 + 4P(t) - P'(t) - P''(t).$$

Soll sich der Markt (für alle t) im Gleichgewicht befinden, so muss $q^D = q^S$ gelten, woraus sich für den Gleichgewichtspreis P die folgende DGL ergibt:

$$P''(t) - 6P'(t) + 10P(t) = 12,$$

oder allgemeiner

$$P''(t) = \alpha P'(t) + \beta P(t) - \gamma.$$

Dies ist eine sogenannte lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

2.1.5 Logistisches Wachstum

Ein verfeinertes Modell zur Beschreibung von Wachstumsprozessen (z.B. von Populationen) wird durch folgende DGL beschrieben.

$$y'(t) = a \cdot y(t) \cdot (b - y(t))$$

mit Konstanten $a, b > 0$. Hierbei handelt es sich um eine sogenannte separierbare DGL.
Lösung: $y(t) = b \cdot (1 + c \cdot e^{-abt})^{-1}$ mit einer Konstanten c.

2.1.6 Das Neoklassische Wachstumsmodell von Solow

Das Nettosozialprodukt Y einer Volkswirtschaft werde mit den Produktionsfaktoren Kapital K und Arbeit A gemäß einer Cobb-Douglas-Funktion beschrieben:

$$Y = Y(t) = K(t)^{\alpha} \cdot A(t)^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0,1), \tag{1}$$

wobei alle Größen als zeitabhängig aufgefasst werden.

Das Modell von Solow geht von folgenden Voraussetzungen aus:

(i) Die Bevölkerung und damit das Arbeitsangebot $A(t)$ wachse mit konstanter Rate $b > 0$, d.h. es gilt $A'(t) = b \cdot A(t)$ bzw.

$$A(t) = A_0 e^{bt}$$

(mit vorgegeben Konstanten A_0, $b > 0$).

(ii) Die zeitliche Änderung des Kapitalstocks $K'(t)$ ist gleich der Nettoinvestition $I(t)$, d.h.

$$K'(t) = I(t).$$

(iii) Die Nettoinvestitionen sind zu jedem Zeitpunkt proportional zum jeweiligen Nettosozialprodukt (mit konstantem Proportionalitätsfaktor s ($0 < s < 1$), der sogenannten *durchschnittlichen Investitions-* bzw. *Sparquote*)

$$I(t) = s \cdot Y(t).$$

Gesucht ist die Funktion $K(t)$.
Betrachten wir das Sozialprodukt und den Kapitalstock als „pro-Kopf-Größen“, bezogen auf die Bevölkerung $A(t)$, so ergibt sich aus (1):

$$\underbrace{\frac{Y(t)}{A(t)}}_{=:y(t)} = \left(\underbrace{\frac{K(t)}{A(t)}}_{=:k(t)}\right)^{\alpha} \Leftrightarrow y(t) = (k(t))^{\alpha} \tag{2}$$

$$\Rightarrow k'(t) = \frac{K'(t)\cdot A(t) - K(t)\cdot A'(t)}{(A(t))^2} = \frac{K'(t)}{A(t)} - \frac{K(t)}{A(t)}\cdot\frac{A'(t)}{A(t)}$$

Wegen (ii), (iii) gilt

$$\frac{K'(t)}{A(t)} = s\cdot y(t) = s\cdot (k(t))^{\alpha}$$

und wegen (i), (2) gilt

$$\frac{K(t)}{A(t)}\cdot\frac{A'(t)}{A(t)} = k(t)\cdot b,$$

sodass folgt

$$k'(t) = s\cdot (k(t))^{\alpha} - b\cdot k(t).$$

Dies ist eine sogenannte *Bernoullische Differentialgleichung.*

Wie man an den Beispielen 2.1.1 bis 2.1.6 sieht, treten in den verschiedensten Bereichen der Ökonomie bei der Modellbildung die verschiedensten Typen von Differentialgleichungen auf.

2.2 Definition, Satz von Picard-Lindelöf

Definition 2.1

1. Es sei $M \subset \mathbb{R}^{m+2}$ eine offene Menge und $F : M \to \mathbb{R}$ gegeben.
   Eine Gleichung der Form
   $$F\left(x, y, y', \dots, y^{(m)}\right) = 0 \tag{2.1}$$
   mit einer m-mal differenzierbaren Funktion y $(y = y(x))$ heißt eine **gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) m-ter Ordnung in impliziter Form**.

2. Es sei $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine offene Menge und $f : \tilde{M} \to \mathbb{R}$ gegeben.
   Eine Gleichung der Form
   $$y^{(m)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}\right) \tag{2.2}$$
   heißt eine **gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) m-ter Ordnung in expliziter Form**.

3. Eine explizite Differentialgleichung m-ter Ordnung heißt **linear**, falls f linear ist, d.h. es existieren ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und Funktionen $a_{m-1}, \dots, a_0, g : I \to \mathbb{R}$, sodass gilt
   $$y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \quad x \in I \tag{2.3}$$
   Falls $g(x) = 0 \;\forall\, x \in I$ gilt, heißt die DGL **homogen**, sonst **inhomogen**. Falls $a_0, \dots, a_{m-1}$ Konstanten sind (auf I), heißt die DGL eine **lineare DGL m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.

4. Eine Differentialgleichung m-ter Ordnung heißt **autonom**, falls F bzw. f bzw. $g, a_0, \dots, a_{m-1}$ nicht von x abhängen.

Bemerkung: Die Bezeichnung homogene bzw. inhomogene DGL gilt in analoger Weise auch für nichtlineare DGLn.

Definition 2.2
Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ zusammen mit einer Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ heißt eine **Lösung der DGL** (2.1), falls für alle $x \in I$ gilt

$$\begin{gathered}\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)\right) \in M \text{ und} \\ F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)\right) = 0 \;\forall\, x \in I\end{gathered}$$

Analog für (2.2) und (2.3).

Existenzsätze für Differentialgleichungen:

Satz 2.3
Eine explizite DGL m-ter Ordnung $y^{(m)}(x) = f(x,y,y',\ldots,y^{(m-1)})$ mit m Anfangswerten $y^{(v)}(x_0) = y_v$ $(v = 0,1,\ldots,m-1)$ besitzt lokal, d.h. in einer Umgebung $U_\delta(x_0)$ $(\delta > 0)$, genau eine Lösung, falls die Funktion $f(x,y,y',\ldots,y^{(m-1)})$ stetig und stetig differenzierbar ist.

Beweis. vgl. Literatur: Satz von Picard-Lindelöf. □

Bemerkung:

2.3 Lineare DGLn 1. Ordnung

Wir betrachten explizite DGLn 1. Ordnung

$$y' = f(x,y) \text{ mit } f : \check{R} \to \mathbb{R},$$

wobei $\check{R} = [a,b] \times [c,d]$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist.
Ist zusätzlich ein Anfangswert $y(x_0) = y_0$ vorgegeben, sprechen wir von einem Anfangswertproblem (AWP).

Aus Satz 2.3 ergibt sich speziell für die Lösung expliziter DGLn 1. Ordnung:

Satz 2.4
Die Funktion $f : \check{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und $(x_0,y_0) \in \check{R}$ sei ein innerer Punkt von $\check{R}$.

(1) Dann gibt es ein $\delta > 0$ und eine differenzierbare Funktion $y(x)$, sodass $y(x)$ in $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a,b]$ eine Lösung der DGL $y' = f(x,y)$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ist.

(2) Ist $f(x,y)$ in $\check{R}$ zusätzlich partiell differenzierbar nach y und f_y stetig auf $\check{R}$, so ist die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig bestimmt.

Beweis. vgl. Literatur: Satz von Peano (1), Satz von Picard-Lindelöf (2). □

2.4 Lineare DGLn m-ter Ordnung

2.4.1 Eigenschaften der Lösungen, Lösungsstruktur

Wie wir in Abschnitt 2.3.2 bereits gesehen haben, gilt bei linearen DGLn 1. Ordnung für die Lösungsstruktur, dass sich die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL zusammensetzt aus der allgemeinen Lösung der homogenen DGL plus einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL. Dies gilt auch für lineare DGLn m-ter Ordnung.
Im Einzelnen gelten folgende Sätze:

Satz 2.6
Sind y_1, y_2 Lösungen der homogenen linearen DGL m-ter Ordnung

$$y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad x \in I \subset \mathbb{R} \tag{2.8}$$

dann sind auch $y_1 + y_2$ und αy_1 ($\alpha \in \mathbb{R}$) Lösungen von (2.8).

Beweis. Nachrechnen (!) □

Bemerkung
Aus diesem Satz folgt sofort das sogenannte Superpositionsprinzip:
Sind $y_1, \ldots, y_m$ Lösungen der homogenen Gleichung (2.8), so ist auch

$$y(x) = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu y_\nu(x) \qquad (c_\nu \in \mathbb{R} \text{ für } \nu = 1, \ldots, m)$$

wieder eine Lösung von (2.8).

Hilfssatz
Sind y_1, y_2 Lösungen der inhomogenen linearen DGL

$$y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \quad x \in I \subset R \tag{2.9}$$

so ist $y_1 - y_2$ eine Lösung der zugehörigen homogenen DGL.

Über die Struktur der Lösung einer linearen inhomogenen DGL m-ter Ordnung gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 2.7
Es bezeichne $\mathcal{L}_h$ die Menge aller Lösungen der homogenen DGL (2.8) und es sei $y_p(x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL (2.9). Dann ist die Lösungsgesamtheit von (2.9) gegeben durch

$$\mathcal{L} = y_p + \mathcal{L}_h = \{y = y_h + y_p : \ y_h \in \mathcal{L}_h\} \tag{2.10}$$

Beweis. vgl. Literatur. □

Wie sich die Menge der Lösungen der homogenen DGL beschreiben lässt, besagt der folgende

Satz 2.8
Sind $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ Lösungen der homogenen linearen DGL (2.8) und sind für ein $x_0 \in I$ die Vektoren

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ \vdots \\ y_2^{(m-1)}(x_0) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} y_m(x_0) \\ y_m'(x_0) \\ \vdots \\ y_m^{(m-1)}(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

<u>linear unabhängig</u>, dann hat jede Lösung $y(x) \in \mathcal{L}_h$ die Form

$$y(x) = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu y_\nu(x), \quad x \in U_\delta(x_0)$$

mit Koeffizienten $c_\nu \in \mathbb{R}$ $(\nu = 1, \ldots, m)$.
Die Funktion $y(x) = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu y_\nu(x)$ bezeichnet man dann als allgemeine Lösung der homogenen DGL (2.8).

Bemerkung

1. Sind $y_1, \ldots, y_m$ Lösungen der homogenen DGL (2.8) und sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} y_\nu(x) \\ y_\nu'(x) \\ \vdots \\ y_\nu^{(m-1)}(x) \end{pmatrix}$$

   für $\nu = 1, \ldots, m$ und $x \in I$ linear unabhängig, so heißen die <u>Funktionen</u> $y_1, \ldots, y_m$ <u>linear unabhängig</u> auf I.
   Man sagt dann, dass $y_1, \ldots, y_m$ ein <u>Fundamentalsystem</u> der DGL (2.8) bilden.

2. Zur Überprüfung der linearen Unabhängigkeit der Lösungen von (2.8) betrachtet man die sogenannte WRONSKI-Determinante

$$W_x := \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_m'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \cdots & y_m^{(m-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Gilt $W_x \neq 0$ für alle $x \in I$, so sind die Lösungen $y_1, \dots, y_m$ linear unabhängig und bilden folglich ein Fundamentalsystem der DGL.

3. Man kann zeigen, dass für alle $x \in I$ entweder $W_x \equiv 0$ oder $W_x \neq 0$ gilt. Daher genügt es, W_{x_0} für ein $x_0 \in I$ zu betrachten.

4. Die m „freien“ Konstanten in der allgemeinen Lösung einer homogenen linearen DGL m-ter Ordnung werden durch m Anfangsbedingungen festgelegt.

Definition 2.9

1. Eine konstante Lösung $y(x) \equiv y^*$ einer (nicht notwendigerweise linearen) DGL m-ter Ordnung heißt **stationär** oder eine **Gleichgewichtslösung**.

2. Eine Gleichgewichtslösung y^* heißt (global) **stabil**, falls gilt

$$y(x) \to y^* \quad (x \to \infty)$$

für jede Lösung y der DGL.

Bemerkung
Eine Konstante y^* ist offenbar genau dann eine Gleichgewichtslösung einer DGL $F\left(y, y', \dots, y^{(m)}\right) = 0$ m-ter Ordnung, wenn gilt $F(y^*, 0, \dots, 0) = 0$.

Satz 2.10
Eine Gleichgewichtslösung y^* einer linearen DGL ist genau dann stabil, wenn $y_h(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ für jede Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen DGL.

2.5 Lineare DGLn m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, autonome DGLn m-ter Ordnung

Wir beschäftigen uns zunächst mit DGLn vom Typ

$$y^{(m)} + \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu y^{(\nu)} = b, \tag{2.11}$$

wobei $a_\nu \in \mathbb{R}$ für $\nu = 0, ..., m-1$ und $b \in \mathbb{R}$.

2.5.1 Die homogene Gleichung

$$y^{(m)} + \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu y^{(\nu)} = 0, \tag{2.12}$$

wobei $a_\nu \in \mathbb{R}$ für $\nu = 0, ..., m-1$.
Erinnerung: Für eine DGL $y' + ay = 0$ erster Ordnung sind die Lösungen gegeben durch $y(x) = ce^{-ax}$, wobei $c \in \mathbb{R}$.
Lösungsansatz für (2.12): $y(x) = e^{\lambda x}$ mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$.
Einsetzen in die DGL:

$$y^{(m)} + \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu y^{(\nu)} = e^{\lambda x} \left(\lambda^m + \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu \lambda^\nu \right) =: e^{\lambda x} P(\lambda) = 0$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $P(\lambda) = 0$ gilt.

Definition 2.11
Für eine homogene lineare DGL m-ter Ordung (2.12) heißt $P(\lambda) = \lambda^m + \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu \lambda^\nu$ das zugehörige **charakteristische Polynom** und $P(\lambda) = 0$ die zugehörige **charakteristische Gleichung**.

Es gilt folgender Satz über die Lösung einer linearen homogenen DGL m-ter Ordnung.

Satz 2.12
Die allgemeine Lösung von (2.12) ist gegeben durch

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_m y_m(x), \quad c_\nu \in \mathbb{R}, 1 \leq \nu \leq m$$

wobei $y_1(x), ..., y_m(x)$ jeweils Lösungen von (2.12) sind, die sich wie folgt berechnen:
Ist λ eine n-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so sind

- falls $\lambda \in \mathbb{R}$: $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, ..., x^{n-1} e^{\lambda x}$
- falls $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, wobei $\lambda = \alpha + i\beta$

$$\begin{array}{cc} e^{\alpha x}\cos(\beta x), & e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ xe^{\alpha x}\cos(\beta x), & xe^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ \vdots & \vdots \\ x^{n-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), & x^{n-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{array}$$

linear unabhängige reellwertige Lösungen.

Beweis. Aus dem Lösungsansatz folgt, dass $y(x) = e^{\lambda x}$ genau dann Lösung von (2.12) ist, wenn λ eine Nullstelle von $P(\lambda)$ ist. Ist $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so folgt, dass auch $\overline{\lambda}$ Nullstelle von $P(\lambda)$ ist. Es sind

$$e^{\lambda x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))$$

sowie

$$e^{\overline{\lambda} x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \sin(\beta x))$$

Lösungen von (2.12). Nach Satz 2.6 sind also auch

$$\frac{1}{2}\left(e^{\lambda x} + e^{\overline{\lambda} x}\right) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \text{ und } \frac{1}{2i}\left(e^{\lambda x} - e^{\overline{\lambda} x}\right) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

(reellwertige!) Lösungen.
Ist λ n-fache Nullstelle: Lösungen in DGL einsetzen und nachrechnen. Die lineare Unabhängigkeit wird mittels der Wronski-Determinate nachgewiesen.□

2.6 Die inhomogene DGL

Methode der unbestimmten Koeffizienten
Lösungsansätze

Störfunktion $b(x)$	**Ansatz für** $y_p(x)$
$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$	$A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m$, falls 0 keine Nullstelle von $P(\lambda)$ ist
	$(A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m) \cdot x^r$, falls 0 eine r-fache Nullstelle von $P(\lambda)$ ist
$a_0 \cos\beta x + b_0 \sin\beta x$	$A_0 \cos\beta x + B_0 \sin\beta x$, falls $\pm i\beta$ keine Nullstellen von $P(\lambda)$ sind
	$(A_0 \cos\beta x + B_0 \sin\beta x) \cdot x^r$, falls $\pm i\beta$ r-fache Nullstellen von $P(\lambda)$ sind
$e^{kx}(a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m)$	$e^{kx}(A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m)$, falls k keine Nullstelle von $P(\lambda)$ ist
	$e^{kx}(A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m) \cdot x^r$, falls k eine r-fache Nullstelle von $P(\lambda)$ ist
$e^{\alpha x}(a_0 \cos\beta x + b_0 \sin\beta x)$	$e^{\alpha x}(A_0 \cos\beta x + B_0 \sin\beta x)$, falls $\alpha \pm i\beta$ keine Nullstellen von $P(\lambda)$ sind
	$e^{\alpha x}(A_0 \cos\beta x + B_0 \sin\beta x) x^r$, falls $\alpha \pm i\beta$ r-fache Nullstellen von $P(\lambda)$ sind
$[(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{m_1} x^{m_1}) \cos\beta x +$ $+(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{m_2} x^{m_2}) \sin\beta x]$	$(A_0 + \ldots + A_m x^m) \cos\beta x + (B_0 + \ldots + B_m x^m) \sin\beta x$, falls $\pm i\beta$ keine Nullstellen von $P(\lambda)$ sind
	$[(A_0 + \ldots + A_m x^m) \cos\beta x + (B_0 + \ldots + B_m x^m) \sin\beta x] \cdot x^r$, falls $\pm i\beta$ $r-$fache Nullstellen von $P(\lambda)$ sind
$e^{\alpha x}[(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{m_1} x^{m_1}) \cos\beta x$ $+(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{m_2} x^{m_2}) \sin\beta x]$	$e^{\alpha x}[(A_0 + \ldots + A_m x^m) \cos\beta x + (B_0 + \ldots + B_m x^m) \sin\beta x]$, falls $\alpha \pm i\beta$ keine Nullstellen von $P(\lambda)$ sind
	$e^{\alpha x}[(A_0 + \ldots + A_m x^m) \cos\beta x + (B_0 + \ldots + B_m x^m) \sin\beta x] \cdot x^r$, falls $\alpha \pm i\beta$ $r-$fache Nullstellen von $P(\lambda)$ sind

$m = \max(m_1, m_2)$
$P(\lambda)$ ist das charakteristische Polynom der (zugehörigen) homogenen DGL

Liegen Linearkombinationen solcher Störfunktionen vor, so wählt man als Lösungsansatz für $y_p(x)$ eine entsprechende Linearkombination der Ansatzfunktionen.