Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 19. April 2016, vor den Übungen

1. Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $ggT(a, b) = 1$.
   Es sei $m \in \mathbb{N}$ die größte Zahl, für die keine Darstellung $m = xa + yb$ mit $x, y \in \mathbb{N}_0$ existiert.
   Zeige, dass $m = ab - a - b$ gilt.

   Hinweis:
   Zeige zunächst, dass sich alle Zahlen größer als $m = ab - a - b$ in dieser Form schreiben lassen und anschließend, dass $m = ab - a - b$ keine solche Darstellung besitzt. (4 Punkte)

2. Aus der Menge der ersten 200 natürlichen Zahlen $M = \{1, 2, \ldots, 199, 200\}$ werden 101 beliebig ausgewählt. Zeige, dass unter den ausgewählten Zahlen stets ein Paar existiert, so dass die eine Zahl durch die andere teilbar ist. (3 Punkte)

3. (a) Es seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeige mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus die Darstellung
   $$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{q_{n+1}}}}}}$$
   mit $q_0 \in \mathbb{N}_0$ und $q_i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq n + 1$.
   Dies nennt man eine Kettenbruchdarstellung von $\frac{a}{b}$, welche man auch folgendermaßen schreibt:
   $$\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}].$$
   (b) Zeige: $[q_0; q_1, \ldots, q_n, 1] = [q_0; q_1, \ldots, q_n + 1]$, d.h. die Kettenbruchentwicklung einer rationalen Zahl ist nicht eindeutig, wenn man als letzte Zahl die 1 zulässt.
   (c) Gilt $[p_0; p_1, \ldots, p_k] = [q_0; q_1, \ldots, q_l]$ mit $p_k, q_l \neq 1$, so ist $k = l$ und $p_i = q_i$ für $0 \leq i \leq k$.
   (d) Bestimme die Kettenbruchentwicklung der Länge des tropischen Jahres, nämlich von 365,2422.
   (e) Noch genauer beschreibt
   $$365\text{d } 5\text{h } 48\text{min } 45,8\text{s} = \left(365 + \frac{104629}{432000}\right) d$$
   die Länge des tropischen Jahres. Dieser Kettenbruch hat die Gestalt $[365; 4, 7, 1, 3, 6, 2, 1, 170]$. Begnügt man sich mit einer Näherung, so bricht man die Kettenbruchentwicklung an einer bestimmten Stelle ab. An welcher Stelle unterbrechen der Julianische bzw. der Gregorianische Kalender diese Kettenbruchentwicklung? (10 Punkte)

4. (a) Bestimme den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen $m = 7960$ und $n = 88326$ und stelle ihn als ganzzahlige Linearkombination dieser Zahlen dar.
   (b) Ermittle im Falle der Existenz eine Lösung der Diophantischen Gleichung $1186x + 394y = c$ mit $c \in \{10, 27\}$. (7 Punkte)