Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Dienstag, 10. Mai 2016, vor den Übungen

1. Ein "Ewiger Kalender" ist eine Formel, nach der man aus dem Datum bezüglich des Gregorianischen Kalenders den Wochentag bestimmen kann. Eine erste Festlegung setzt den Beginn eines Jahres auf den 1. März, da somit ein eventueller Schalttag am Ende des Jahres liegt.
   Die Gregorianische Kalenderreform fand 1582 statt. Es wurde festgesetzt, dass ab dem Jahr 1600 jedes vierte Jahr ein Schaltjahr ist, jedes 100. Jahr aber nicht und jedes 400. Jahr dagegen wieder.
   Wir ordnen jedem der sieben Wochentage eine Zahl zu, die Wochentagszahl. Dabei beginnen wir mit dem Sonntag von 0 ab zu zählen, fortlaufend bis zum Samstag mit der 6.
   Weiter sei a_0 die Wochentagszahl des 1. März 1600.

   (a) Es sei $t \in \mathbb{N}_0$, und es bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x.
   Zeige, dass für a_t, die Wochentagszahl des 1. März des Jahres $1600 + t$, folgende Formel gilt:
   $$a_t \equiv a_0 + t + \left[\frac{t}{4}\right] - \left[\frac{t}{100}\right] + \left[\frac{t}{400}\right] \bmod 7.$$

   (b) Bestimme a_0 anhand des 1. März 2016.

   (c) Welche Darstellung für a_t erhalten wir, wenn wir die Jahreszahl in Teilaufgabe a) in der Form $100c + d$ mit $0 \leq d < 100$ schreiben?

   Wir führen jetzt die Bezeichnung $(n.m.)_{100c+d}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ für die Wochentagszahl des n. Tages mit $1 \leq n \leq 31$ im m. Monat mit $1 \leq m \leq 12$ im Jahr $100c + d$ ein, wobei Januar und Februar als 11. und 12. Monat zum Vorjahr zählen. Um für jedes beliebige Datum den Wochentag bestimmen zu können, müssen wir allerdings noch die unterschiedliche Länge der Monate berücksichtigen.
   Es sei daher $r_m \equiv (01.m.)_{100c+d} - (01.01.)_{100c+d} \bmod 7$.

   (d) Bestimme diese Werte r_m für $1 \leq m \leq 12$.

   (e) Fasse die bisherigen Ergebnisse zusammen und schließe daraus die Kalenderformel
   $$(n.m.)_{100c+d} \equiv n + 5c + d + \left[\frac{13m-1}{5}\right] + \left[\frac{d}{4}\right] + \left[\frac{c}{4}\right] \bmod 7.$$

   (f) An welchen Wochentagen fanden folgende Ereignisse statt?
      i. der Kolomanikirtag 1582 in Melk
      ii. der Geburtstag von Peter Gustav Lejeune Dirichlet
      iii. die Deutsche Wiedervereinigung

   (g) An welchen Wochentagen sind folgende historische Worte gefallen?
      i. "Aus dem Hintergrund müsste Rahn schießen, Rahn schießt. Tor..."
      ii. "Wir sind zu Ihnen gekommen, um Ihnen mitzuteilen, dass heute Ihre Ausreise..."
      iii. "Sofort, unverzüglich!" (12 Punkte)

2. Bestimme die Verknüpfungstafeln von Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. (2 Punkte)

3. Wir betrachten nochmals Lösungen $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ der Diophantischen Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$.

   (a) Zeige:

      i. Mindestens eine der Zahlen x, y und z ist durch drei teilbar.

      ii. 4 teilt $x \cdot y$

      iii. 60 teilt $x \cdot y \cdot z$

   (b) Bestimme die größte Menge $M \subset \mathbb{N}$, so dass zu jedem $n \in M$ jedes pythagoräische Tripel eine durch $n \in M$ teilbare Zahl enthält. (6 Punkte)

4. Bestimme 24^{65535} mod 51. (4 Punkte)