

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte und 6 Zusatzpunkte

Abgabe: Dienstag, 17. Mai 2016, vor den Übungen

1. Bestimme $577^6 \bmod 2016$. (4 Punkte)
2. (a) Wir betrachten das Polynom $P(x) = x^6 - 7x^5 + 21x^4 + 15x^3 + 35x + 5$.
Bestimme alle Lösungen der Kongruenz $P(x) \equiv 0 \pmod{7}$.
(b) Zeige, dass die Diophantische Gleichung

$$x^3 + x^2 + x + 3 = 10^y$$

für alle $x \in \mathbb{Z}$ und alle $y \in \mathbb{N}_0$ unlösbar ist. (6 Punkte)

3. (a) Lässt sich die Kongruenz $13 \cdot 16 \equiv 13 \cdot 67 \pmod{221}$ durch ihren gemeinsamen Faktor 13 kürzen?
(b) Bestimme im Falle der Existenz das multiplikative Inverse von
 - i. $51 \bmod 391$
 - ii. $213 \bmod 1280$
 - iii. $18 \bmod 103$ unter Zuhilfenahme der Gleichung $18 \cdot 269 = 1 + 47 \cdot 103$ (5 Punkte)

4. Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$.
Zeige, dass die Gleichung $ax + b = 0$ genau dann eine ganzzahlige Lösung besitzt, wenn die lineare Kongruenz $ax + b \equiv 0 \pmod{m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ eine Lösung hat. (4 Punkte)

5. Überprüfe die folgenden linearen Kongruenzen auf Lösbarkeit und gib im Falle der Existenz die jeweilige Lösungsgesamtheit an:
 - (a) $47x \equiv 16 \pmod{257}$
 - (b) $13x \equiv 11 \pmod{143}$
 - (c) $77x \equiv 56 \pmod{119}$ (5 Punkte)

6. In einem abgegrenzten Bereich leben 100 Zwerge in Gefangenschaft eines Riesen. Dieser Riese frisst die Zwerge sehr gerne und feiert das ganze, indem er vorher allen Zwergen farbige Hüte aufsetzt. Es gibt genau drei Farben, von denen jede mindestens zweimal vorkommt. Die Zwerge haben allerdings so lange Köpfe, dass sie ihre eigene Hutfarbe nicht sehen können. Er wählt die Zwerge nacheinander zufällig aus und fragt sie nach der Farbe ihres Hutes. Bei richtiger Antwort lebt der befragte Zwerg weiter, bei falscher Antwort wird er gefressen. Bevor der Riese die Hüte verteilt, haben die Zwerge eine Stunde Zeit, eine Strategie abzusprechen. Welche Strategie vereinbaren die Zwerge, damit mindestens 99 der 100 Zwerge überleben?

Hinweis:

Nach Verteilung der Hüte dürfen die Zwerge natürlich nur noch mit dem Riesen reden. (6 Punkte)